

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA a V-a, TULCEA, 23 februarie 2013

Clasa a VII - a

1. a) Se consideră numărul $q = (1 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - (3 - \sqrt{2})$. Arătați că $|q| \in \mathbb{N}$.

b) Determinați perechile de numere raționale pozitive $(a; b)$, $b \neq 0$, care verifică

$$\text{egalitatea } \sqrt{ab + \sqrt{3}} = \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{b}}.$$

2. Se consideră un număr natural prim p .

a) Arătați că, dacă $p > 3$, atunci numărul $m = 2p^2 + 1$ este compus;

b) Determinați toate numerele naturale prime p cu proprietatea că numărul $m = 2p^2 + 1$ este pătrat perfect.

3. Se consideră numerele reale strict pozitive și diferite a_1, a_2, \dots, a_{10} .

Dacă $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{10}}} > \sqrt{39}$, arătați că cel puțin unul dintre numerele

a_1, a_2, \dots, a_{10} **nu** este natural.

4. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AD \perp BC$, $D \in BC$, $DE \perp AC$, $E \in AC$,

iar $M \in (DE)$ astfel încât $\frac{DC}{DM} = \frac{DB}{EM}$. Demonstrați că $AM \perp BE$.

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.

- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

- Timp de lucru: 3 ore efectiv.