CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA A V-A, TULCEA, 23 februarie 2013

Clasa a VIII – a

1. Se consideră numărul $p(m)=48m^2+16m+1$, unde $m\in\mathbb{N}^*$.

a) Dacă numărul $p(m)$ este pătrat perfect, arătați că m este produsul a două numere naturale consecutive.

b) Dați un exemplu de pereche de numere naturale nenule $(m;a)$ cu proprietatea că $p(m)=(8a+1)^2$.

2. Se consideră piramida $SABCD$ în care baza $ABCD$ este un paralelogram cu centrul în punctul O, $AB=2\sqrt{3}$ cm şi $A_{ABCD}=12\,\text{cm}^2$. Se ştie că $SO\perp(ABCD)$, $SO=\sqrt{3}$ cm, iar $(SBC)\perp(SDA)$.

a) Demostrați că piramida *SABCD* este regulată;

b) Arătați că $A_{SAC}=A_{SAB}$.

3. Determinați numerele reale pozitive *a* şi *b* ştiind că $\dfrac{a}{b^2+2a+1}+\dfrac{b}{a^2+2b+1}\geq\dfrac{1}{2}$.

4. Se consideră mulțimea $A=\left\{a+b\sqrt{2013}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{N},\ a^2-2013b^2=1\right\}$. Arătați că:

a) Numărul $[x]$ este număr natural impar, pentru orice $x\in A$;

b) $3\{x\}\leq[x]$, pentru orice $x\in A$.

(Notațiile $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă *partea întreagă* şi respectiv *partea fracționară* a numărului real a.)

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
- Timp de lucru: 3 ore efectiv.