CLASA A IX-A – ENUNŢURI

1. Fie $a, b, c \in [0, +\infty)$. Arătaţi că $|a-b|+|b-c|+|c-a| = 2\max\{a, b, c\}$ dacă şi numai dacă $abc = 0$.

Laurenţiu Panaitopol

2. Pe laturile unui triunghi ABC luăm punctele distincte $A_1, A_2 \in (BC)$, $B_1, B_2 \in (AC)$, $C_1, C_2 \in (AB)$ astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$.

a) Arătaţi că, dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $\overrightarrow{A_1A_2} = x\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = y\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C_1C_2} = z\overrightarrow{AB}$, atunci $x = y = z$.

b) Fie $\{M\} = A_2B_1 \cap B_2C_1, \{N\} = B_2C_1 \cap C_2A_1, \{P\} = C_2A_1 \cap A_2B_1$. Arătaţi că

$$\frac{A_2B_1}{MP} = \frac{B_2C_1}{MN} = \frac{C_2A_1}{NP}.$$

3. Este totdeauna posibil să partiţionăm o mulţime de 2013 numere naturale, aflate în progresie aritmetică, în trei mulţimi astfel încât suma elementelor din fiecare mulţime să fie aceeaşi? Dar o mulţime de 2012 numere?

4. Funcţia $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ are proprietăţile:

(i) $f(1) = 1$

(ii) pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, dacă $f(a) = 1$ şi $f(b) = 1$, atunci $f(a+b) \neq f(a-b)$.

Determinaţi $f(0), f(2)$ şi $f(2013)$.