Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului si Sportului
Inspectoratul Şcolar al Județului Timiş

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
# *"ADOLF HAIMOVICI"*
*etapa locală – 9 februarie 2013*
## CLASA A IX-A
**Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Ştiințe ale naturii**

**BAREM DE NOTARE ŞI CORECTARE**

**SUBIECTUL I**

**1.** Demonstrați că dacă $x, y, z, a, b, c$ sunt numere reale atunci are loc relația
$$(xa+yb+zc)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2).$$

**2.** Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât $x^2+y^2+z^2=1$. Arătați că $|x+y+z| \le \sqrt{3}$.

**BAREM DE NOTARE**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | Prin calcul direct obține $(xb-ya)^2+(xc-za)^2+(yc-bz)^2 \ge 0$ | **4p** |
| **2.** | Aplică ex.1 pentru a=1,b=1,c=1 şi obține $(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$ iar conform ipotezei rezultă relația cerută | **3p** |

**SUBIECTUL II**

**1.** Fie predicatele $p(x)$:"$|x-2|+|1-x|=1,\ x\in\mathbf{R}$" şi $q(x)$: "$\left[\frac{2x-1}{2}\right]=1,\ x\in\mathbf{R}$". Fie $A$ şi $B$ mulțimile de adevăr ale celor două predicate. Determinați $A\cap B$ .

**2.** Fie $A=\{p\in\mathbf{N},\ p<40,\ p \text{ număr prim}\}$ şi $B=\left\{r\in\mathbf{Q},\ r=\frac{a}{b},\ a,b\in A\right\}$.

Determinați cardB.

**BAREM DE NOTARE**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\lvert x-2\rvert+\lvert 1-x\rvert=1 \Leftrightarrow x\in[1,2]$ | **2p** |
| | $\left[\frac{2x-1}{2}\right]=1 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ | **1p** |
| | $A\cap B=\left[\frac{3}{2},2\right]$ | **1p** |
| **2.** | $A=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37\} \Rightarrow cardA=12$ | **1p** |
| | $\left.\begin{array}{l} a\in A \\ b\in A \end{array}\right\} \Rightarrow cardB=12\cdot 12=144$ | **2p** |

## SUBIECTUL III

Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu termenul general $a_n = 2n+3$.

**a)** Demonstraţi că $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este progresie aritmetică şi precizaţi raţia.

**b)** Verificaţi identitatea $\dfrac{1}{a_k\cdot a_{k+1}\cdot a_{k+2}} = \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{a_k\cdot a_{k+1}} - \dfrac{1}{a_{k+1}\cdot a_{k+2}}\right), \forall k\in\mathbf{N}^*$

**c)** Demonstraţi că $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$ avem:

$$\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot a_3}+\frac{1}{a_2\cdot a_3\cdot a_4}+\ldots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a_1\cdot a_2}-\frac{1}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}\right).$$

**BAREM DE NOTARE**

| | |
|---|---|
| a) $a_{n+1}-a_n = 2(n+1)+3-2n-3 = 2 \Rightarrow r=2$ | **2p** |
| b) conform a) $a_{k+2}-a_k = 4, \forall k=\overline{1,n}$<br>$\Rightarrow \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{a_k\cdot a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_{k+1}\cdot a_{k+2}}\right)=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{a_{k+2}-a_k}{a_k\cdot a_{k+1}\cdot a_{k+2}}\right)=\dfrac{1}{a_k\cdot a_{k+1}\cdot a_{k+2}}$ | **1p**<br><br>**1p** |
| c) aplică b pentru fiecare fracţie şi prin însumarea relaţiilor obţine cerinţa | **3p** |

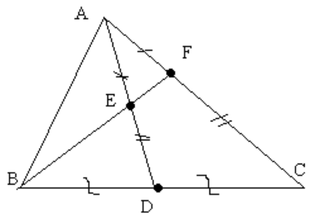
## SUBIECTUL IV

În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului BC, E este mijlocul lui AD, iar $F\in[AC]$ astfel încât FC=2FA.

**a)** Arătaţi că $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)$.

**b)** Să se arate că punctele B,E,F sunt coliniare şi să se afle valoarea raportului $\dfrac{BE}{BF}$.

**BAREM DE NOTARE**

<table>
<tr><td>a)


</td><td>E este mijlocul lui AD<br>$\Rightarrow \overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)$</td><td>2p</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) D este mijlocul lui BC$\Rightarrow \overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$<br>$\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}=$<br>$=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BE}\Rightarrow B,E,F$ coliniare şi $\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{3}{4}$</td><td>1p<br>2p<br>2p</td></tr>
</table>