Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului si Sportului
Inspectoratul Şcolar al Județului Timiş

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 9 februarie 2013
CLASA A IX-A
Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Ştiințe ale naturii

SUBIECTUL I

1. Demonstrați că dacă x, y, z, a, b, c sunt numere reale atunci are loc relația
$$(xa+yb+zc)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2).$$

2. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât $x^2+y^2+z^2=1$. Arătați că $|x+y+z| \le \sqrt{3}$.

SUBIECTUL II

1. Fie predicatele $p(x)$:"$|x-2|+|1-x|=1,\ x\in\mathbf{R}$" şi $q(x)$: "$\left[\frac{2x-1}{2}\right]=1,\ x\in\mathbf{R}$". Fie A şi B mulțimile de adevăr ale celor două predicate. Determinați $A\cap B$.

2. Fie $A=\{p\in\mathbf{N},\ p<40,\ p \text{ număr prim}\}$ şi $B=\left\{r\in\mathbf{Q},\ r=\frac{a}{b},\ a,b\in A\right\}$.

Determinați cardB.

SUBIECTUL III

Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu termenul general $a_n=2n+3$.

a) Demonstrați că $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este progresie aritmetică şi precizați rația.

b) Verificați identitatea $\dfrac{1}{a_k\cdot a_{k+1}\cdot a_{k+2}}=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{a_k\cdot a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_{k+1}\cdot a_{k+2}}\right), \forall k\in\mathbf{N}^*$

c) Demonstrați că $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$ avem:
$$\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot a_3}+\frac{1}{a_2\cdot a_3\cdot a_4}+\ldots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a_1\cdot a_2}-\frac{1}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}\right)$$

SUBIECTUL IV

În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului BC, E este mijlocul lui AD, iar $F\in[AC]$ astfel încât FC=2FA.

a) Arătați că $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)$.

b) Să se arate că punctele B,E,F sunt coliniare şi să se afle valoarea raportului $\frac{BE}{BF}$.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Timp de lucru efectiv trei ore.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)*

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timis