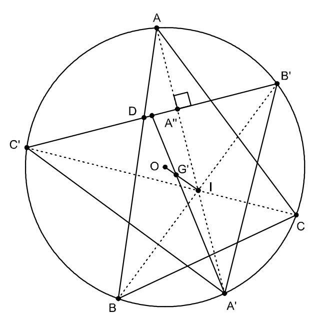
Clasa a X-a

1) a) *Fie O, G, H centrul cercului circumscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul unui triunghi ABC. Dacă prin z_X înţelegem afixul punctului X, arătaţi că $|z_H - z_G| = 2 \cdot |z_G - z_O|$.*

b) *Fie A', B', C' punctele de intersecţie dintre bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{A}, \widehat{B}$, respectiv $\widehat{C}$ cu cercul circumscris triunghiului ABC. Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului ABC, centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ sunt trei puncte coliniare.*

Solutie. a) Este cunoscut faptul că punctele O, G, H sunt coliniare, apartinand dreptei lui Euler si $HG = 2GO$, de unde rezulta concluzia.

b)



Fie $\{A''\} = AA' \cap B'C'$ şi $\{D\} = AB \cap B'C'$. Avem

$$m(\widehat{ADB'}) = \frac{m(\overset{\frown}{C'B}) + m(\overset{\frown}{AB'})}{2} = \frac{m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ABC})}{2} = \frac{180^\circ - m(\widehat{A})}{2} = 90^\circ - m(\widehat{DAA''}),$$

sau $m(\widehat{AA''D}) = 90^\circ$, deci $AA' \perp B'C'$. Analog $BB' \perp A'C'$, deci centrul cercului inscris (I) in triunghiul ABC este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$. Deoarece triunghiurile ABC si $A'B'C'$ au acelasi cerc circumscris, rezulta ca punctele I, O si centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ apartin dreptei lui Euler a triunghiului $A'B'C'$.

2) *Fie P un punct în interiorul unui cerc. Două perpendiculare variabile ce trec prin P intersectează cercul în punctele A şi B. Găsiţi locul geometric al mijlocului segmentului AB.*

(Dorin Andrica, Cluj-Napoca)

Solutia 1. Folosim faptul că mediana care pleacă din vârfului plasat în unghiul drept este egala cu jumatate din ipotenuza. Deoarece M este mijlocul lui AB, rezulta ca $OM \perp AB$. Prin urmare:

$$OM^2 + MB^2 = R^2,$$

sau $OM^2 + MP^2 = R^2$. Daca N este mijlocul segmentului OP, din teorema medianei avem

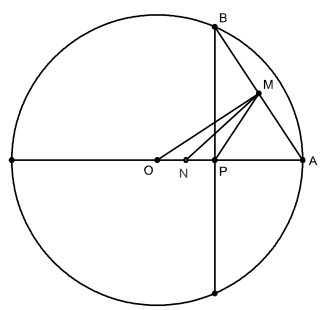
$$2 \cdot MN^2 + \frac{OP^2}{2} = R^2$$

prin urmare

$$MN = \frac{\sqrt{2R^2 - OP^2}}{2}$$

Am aratat ca punctul M apartine unui cerc cu centrul în N si raza $\frac{\sqrt{2R^2-OP^2}}{2}$.

Solutia 2. Fara a pierde din generalitate, putem presupune ca $P = t \in [0,1]$ si cercul $C = \{z \in C : |z| = 1\}$.



Fie $A = z = x + iy \in \mathbb{C}$, apoi $B = \omega = si(z - P) + P \in \mathbb{C}$ cu $s > 0$. Prin urmare $1 = |z|^2 = (t - sy)^2 + s^2(x - t)^2$

Afixul mijlocului segmentului AB este $M = \frac{A+B}{2}$. Afirmam ca: $\left|M - \frac{P}{2}\right| = \frac{\sqrt{2-|P|^2}}{2}$. Avem:

$$\left(2\left|M - \frac{P}{2}\right|\right)^2 = (x - sy)^2 + (s(x-t) + y)^2$$

$$= x^2 + y^2 + 1 - t^2 = 2 - t^2.$$

Prin urmare, locul geometric este un cerc cu centrul in puncul de afix $\frac{P}{2}$ si raza $\frac{\sqrt{2-|P|^2}}{2}$

3) *Fie* $A_1A_2...A_n$ *un poligon convex înscris într-un cerc de centru* O *şi rază* R. *Să se arate că pentru fiecare punct* M *din planul poligonului următoarea inegalitate este adevarată:*

$$\prod_{k=1}^{n} MA_k \leq (OM^2 + R^2)^{n/2}$$

(Dorin Andrica, Cluj-Napoca)

Solutie. Fie O originea în planul complex. Fără a pierde din generalitate presupunem că $R = 1$, iar afixele punctelor $A_1, A_2, ..., A_n, M$ sunt numerele complexe $\omega, \omega^2, ..., \omega^n$, respectiv x, unde $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Rezultă că inegalitatea cerută este echivalentă cu

$$\prod_{k=1}^{n} |x - \omega^k| \leq \sqrt{(|x|^2 + 1)^n},$$

deoarece numerele complexe $\omega, \omega^2, ..., \omega^n$ sunt rădăcinile ecuatiei $z^n - 1 = 0$. Din inegalitatea triunghiului avem

$$\prod_{k=1}^{n} |x - \omega^k| = |x^n - 1| \leq |x|^n + 1.$$

Prin urmare, este suficient să se dovedească faptul că $(|x|^n + 1)^2 \leq (|x|^2 + 1)^n$, adica

$$2|x|^n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)}|x|^{2k}$$

Aceasta este o consecintă a inegalitatii mediilor, deoarece

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)})|x|^{2k} \geq n|x|^2 + n|x|^{2n-2}$$

$$\geq 2n|x|^n \geq 2|x|^n$$

si $n \geq 3$. Aceasta completează demonstratia. Egalitatea este adevarata daca si numai daca $|x| = 0$, adică atunci când $M \equiv O$.