Clasa a VI-a

1) *Pe laturile* (AB) *şi* (AC) *ale triunghiului echilateral* ABC *se consideră punctele* D, *respectiv* E *astfel ca* $(AD) \equiv (CE)$ *şi fie* $\{M\} = BE \cap CD$. *Să se determine măsura unghiului* $\widehat{BMC}$.

Soluţie. $\Delta ADC \equiv \Delta BEC$ $(L.U.L) \Rightarrow \widehat{EBC} \equiv \widehat{ACD} \Rightarrow m(\widehat{BMC}) = 180^\circ - m(\widehat{EBC}) - m(\widehat{BCM}) = 180^\circ - m(\widehat{ACD}) - m(\widehat{BCM}) = 180^\circ - m(\widehat{C}) = 120^\circ$.

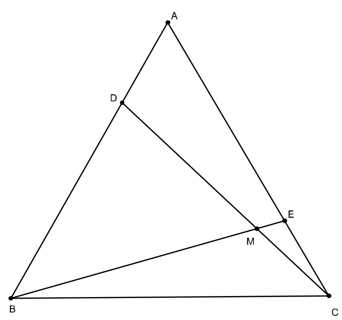


Fig. 1

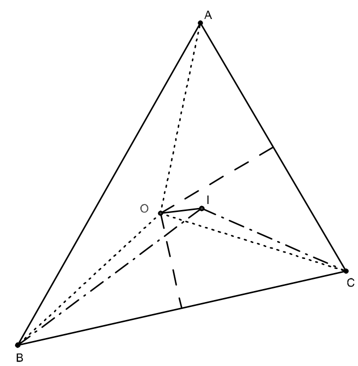


Fig. 2

2) *Fie* ABC *un triunghi oarecare in care* $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$. *Dacă* I *este punctul de intersecţie dintre bisectoarele interioare ale unghiurilor* $\widehat{ABC}$ *şi* $\widehat{BCA}$, *iar* O *este punctul de intersecţie dintre mediatoarele segmentelor* $[BC]$ *şi* $[AC]$, *să se arate că unghiurile* $\widehat{BIC}$ *şi* $\widehat{BOC}$ *sunt congruente.*

Soluţie. (Vezi Fig. 2.)

$$m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - m(\widehat{IBC}) - m(\widehat{ICB}) =$$

$$180^\circ - \frac{m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - m(\widehat{A})}{2} = 120^\circ.$$

Deoarece O este punctul de intersecţie dintre mediatoarele segmentelor $[BC]$ şi $[AC]$, rezulta ca triunghiurile BOC, COA, AOB sunt isoscele. Fie $m(\widehat{BCO}) = x, m(\widehat{CAO}) = y, m(\widehat{ABO}) = z$. Atunci $x + y + z = 90^\circ$ si $y + z = 60^\circ$, de unde $x = 30^\circ$. Rezulta ca

$$m(\widehat{BOC}) = 180^\circ - 2x = 120^\circ.$$

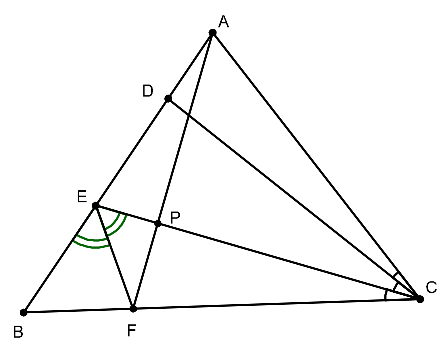
3. *Fie ABC un triunghi isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$ şi $m(\widehat{BAC}) = 72°$. Pe latura AB se consideră punctele D şi E astfel încât $\widehat{ACD} \equiv \widehat{DCE} \equiv \widehat{ECB}$, iar $F \in (BC)$ astfel încât EF este bisectoarea unghiului $\widehat{BEC}$.*

a) Arătaţi că $\Delta AFB \equiv \Delta CFE$,

b) Demonstraţi că $AF \perp CE$.

(Eugen Blăjuţ, Bacău - G.M.)

Soluţie.



a) Avem $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 54°$ şi $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ECB}) = 18°$.

In triunghiul ACE : $m(\widehat{ACE}) = 36°$, deci $m(\widehat{AEC}) = 72°$, de unde rezulta ca triunghiul AEC este isoscel si de aici $(AC) \equiv (CE)$. Cum triunghiul ABC este isoscel avem

$$(AB) \equiv (CE) \tag{1}$$

In triunghiul BCE : $m(\widehat{BEC}) = 108°$, deci $m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{FEC}) = 54°$, de unde rezulta ca triunghiul BEF este isoscel si de aici

$$(BF) \equiv (FE) \tag{2}$$

Cum

$$m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{FEC}) = 54° \tag{3}$$

din (1), (2) si (3) rezultă că $\Delta AFB \equiv \Delta CFE$ (L.U.L).

b) Fie $\{P\} = AF \cap CE$. In triunghiul APC :

$$m(\widehat{PAC}) = 72° - m(\widehat{BAF}) = 72° - m(\widehat{ECF}) = 72° - 18° = 54°$$

iar $m(\widehat{ACP}) = 36°$, deci deci $m(\widehat{APC}) = 90°$.