Clasa a VIII-a

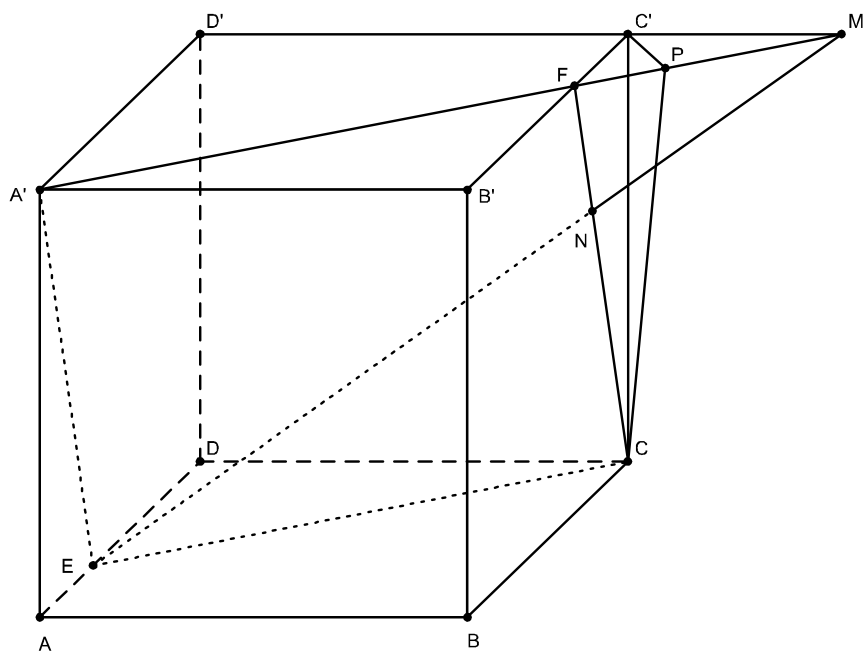
1) *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latura egală cu 9 cm, iar E şi F două puncte pe segmentele (AD), respectiv $(B'C')$ astfel încât $AE = FC' = 3$ cm.*

a) Calculaţi aria patrulaterului $A'FCE$.

b) Dacă $\{M\} = A'F \cap C'D'$, iar N punctul de intersecţie dintre dreapta EM cu planul (BCC'). Determinaţi lungimea segmentului FN.

(Cătălin Barbu, Bacău)

Demonstraţie.



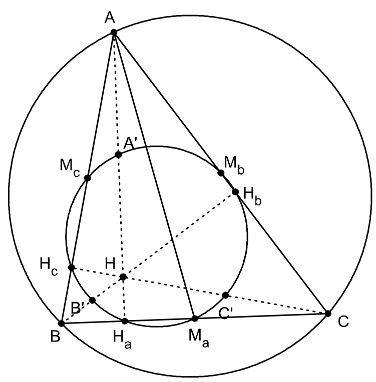
a) Patrulaterul $A'ECF$ este paralelogram. Dacă $C'P \perp A'M$,atunci $CP \perp A'M$. Din triunghiul dreptunghic $C'FM$ rezultă $C'P = \frac{9}{\sqrt{13}}$. Din triunghiul dreptunghic $C'CP$ rezultă $CP = \frac{9\sqrt{14}}{\sqrt{13}}$. Avem $A_{A'ECF} = A'F \cdot CP = 3\sqrt{13} \cdot \frac{9\sqrt{14}}{\sqrt{13}} = 27\sqrt{13}(cm^2)$.

b) Avem $\{N\} = (BCC') \cap (A'EM)$, adica $N \in FC$. Deoarece $\Delta MFN \sim \Delta MA'E$ şi $\Delta MC'F \sim \Delta MD'A'$ avem: $\frac{FN}{A'E} = \frac{FM}{A'M} = \frac{C'F}{A'D'} = \frac{1}{3}$, deci $FN = \frac{A'E}{3} = \sqrt{10}$.

2) *În triunghiul* ABC *fie* H_a, H_b, H_c *picioarele înălţimilor,* M_a, M_b, M_c *mijloacele laturilor* BC, CA *respectiv* AB *şi* A', B', C' *mijloacele segmentelor* AH, BH, *respectiv* CH (H*.este ortocentrul triunghiului* ABC). *Să se arate că punctele* $H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, A', B', C'$ *sunt conciclice.*

(Leonhard Euler (1707-1783))

Demonstraţie. În triunghiul dreptunghic AH_aB, H_aC este mediană, deci $H_aM_c = \frac{AB}{2}$ (1), M_aM_b este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $M_aM_b = \frac{AB}{2}$ (2).



Din (1) şi (2) rezultă că $M_aM_b = H_aM_c$ şi cum $M_cM_b \parallel BC$ (deoarece M_cM_b este linie mijlocie în triunghiul ABC) rezultă că patrulaterul $M_cH_aM_aM_b$ este trapez isoscel, deci punctele M_a, M_b, M_c şi H_a aparţin unui cerc C . Analog, se arată că punctele H_b şi H_c aparţin cercului C. În triunghiul BHC, M_aC'este linie mijlocie, deci $M_aC' \parallel BH$,de unde

$$\sphericalangle HBC \equiv \sphericalangle C'M_aC \tag{3}$$

Patrulaterul BH_aHH_c fiind inscriptibil $(m(\sphericalangle BH_aH) + m(\sphericalangle BH_cH) = 180°)$ rezultă că

$$\sphericalangle HBH_a \equiv \sphericalangle HH_cH_a \tag{4}$$

Din relaţiile (3) şi (4) rezultă că

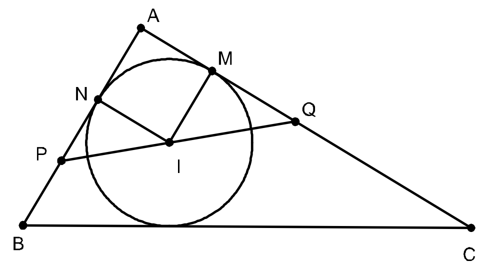
$$\sphericalangle C'M_aC \equiv \sphericalangle H_aH_cH,$$

adică patrulaterul $C'M_aH_aH_c$ este inscriptibil, deci C' aparţine cercului C . Analog, se demonstrează că punctele A' şi B' sunt pe cercul C.

3) *O dreaptă d care trece prin centrul cercului înscris în triunghiul dreptunghic ABC, $(m(\widehat{A}) = 90^\circ)$, intersectează laturile AB şi AC în punctele P, respectiv Q. Determinaţi valoarea minimă a produsului $AP \cdot AQ$.*

(Dorin Andrica, Cluj-Napoca)

Solutie. Fie I centru cercului inscris al triunghiului ABC.



Presupunem ca M, N sunt proiectiile lui I pe AC, respectiv AB. Avem $IM = IN = r$. Din asemănarea triunghiurilor QMI şi QAP, vom obtine $QM \cdot PN = r^2$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC. Rezulta ca:

$$AP \cdot AQ = (AN + NP)(AM + MQ)$$

$$= 2r^2 + r(NP + MQ) \geq 2r^2 + 2r\sqrt{NP \cdot MQ}$$

$$= 2r^2 + 2r^2 = 4r^2.$$

Astfel:

$$AP \cdot AQ = 4r^2.$$

Ecuatia devine o egalitate daca si numai daca:

$$NP = MQ \Leftrightarrow AP = AQ \Leftrightarrow \widehat{APQ} = \widehat{AQP} = 45^\circ.$$