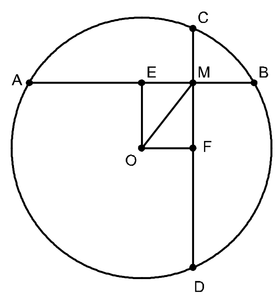
CLASA a IX-a

1) *Fie AB şi CD două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O. Dacă M este punctul de intersecţie dintre AB şi CD, atunci următoarea inegalitate este adevărată:*

$$2MO \leq MA + MB + MC + MD.$$

(Dorin Andrica, Cluj - Napoca)

Solutie. Avem: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$ şi analoagele.



Rezultă $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Fie E şi F proiecţiile punctului O pe laturile AB şi CD. Avem
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OE}$ şi $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OF}$, de unde

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = 2\overrightarrow{OM},$$

şi de aici obţinem

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MO}.$$

Utilizând inegalitatea triunghiului avem:

$$\left|2\overrightarrow{MO}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| \leq \left|\overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| + \left|\overrightarrow{MC}\right| + \left|\overrightarrow{MD}\right|,$$

de unde rezultă concluzia.

2) *Pe prelungirile laturilor $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ale unui triunghi ABC, alegem punctele M, N, P, dincolo de C, A, respectiv B, astfel încât $AN = a$, $BP = b$ şi $CM = c$. Să se arate că*

$$S_{MNP} \geq 7S_{ABC},$$

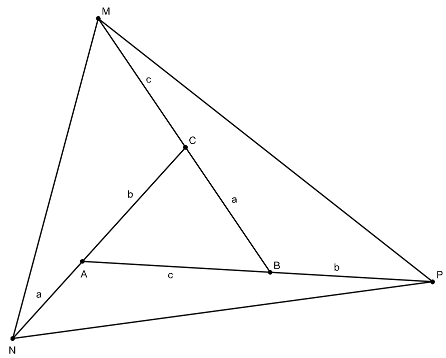
unde S_{ABC} este aria triunghiului ABC.

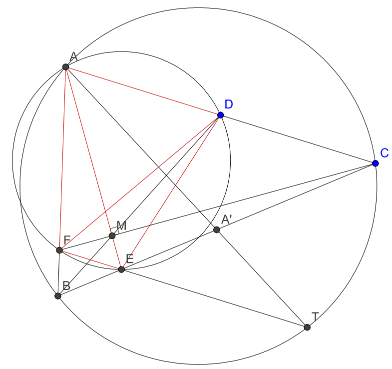
(Nicuşor Minculete, Sfântul Gheorghe)

Solutie. $S_{MNP}=S_{MCN}+S_{NAP}+S_{PBM}+S_{ABC}=\frac{c(b+a)\sin C}{2}+\frac{a(c+b)\sin A}{2}+\frac{b(a+c)\sin B}{2}+\frac{abc}{4R}=\frac{c^2(b+a)}{4R}+\frac{a^2(c+b)}{4R}+\frac{b^2(a+c)}{4R}+\frac{abc}{4R}$,

$$S_{MNP}=\frac{1}{4R}\left[ac^2+a^2b+b^2c+c^2b+a^2c+b^2a+abc\right]\geq$$

$$\frac{1}{4R}\left[3abc+3abc+abc\right]=7\frac{abc}{4R}=7S_{ABC}.$$





3) *Pe mediana BD a triunghiului ABC se consideră punctul M astfel încât $MD=2BM$. Fie E şi F intersecţiile dreptelor AM şi MC cu BC, respectiv AB. Dacă $\widehat{AMC}=90°$, arătaţi că patrulaterul $AFED$ este inscriptibil dacă şi numai dacă mediana AA' a triunghiului ABC şi EF sunt concurente într-un punct ce aparţine cercului circumscris triunghiului ABC.*

(Dorin Andrica, Cluj-Napoca şi Cătălin Barbu, Bacău)

Solutie. Cu notatiile consacrate, deoarece MD este mediana in ΔAMC, atunci $MD=AD=DC=\frac{b}{2}=\frac{2}{3}m_b$, deci $m_b=\frac{3b}{4}$. Din teorema medianei $m_b^2=\left(\frac{3b}{4}\right)^2=\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$,

$$8(a^2+c^2)=13b^2 \tag{1}$$

Teorema lui Menelaus in triunghiul BDA, $\frac{MB}{MD}\cdot\frac{FA}{FB}\cdot\frac{CD}{CA}=1\Leftrightarrow$

$$\frac{FA}{FB}=2\cdot 2=4 \tag{2}$$

Teorema lui Menelaus in triunghiul BDC, avem $\frac{MD}{MB}\cdot\frac{CA}{AD}\cdot\frac{EB}{EC}=1\Leftrightarrow$

$$\frac{EC}{EB}=2\cdot 2=4 \tag{3}$$

Din (2) si (3) avem $\frac{FA}{FB}=\frac{EC}{EB}$, iar din reciproca teoremei lui Thales gasim $EF\parallel AC$, deci $AFED$ este trapez. Dar $AFED$ este inscriptibil $\Leftrightarrow$

$$AF=ED \tag{4}$$

Din (2)

$$AF = \frac{4}{5} \cdot AB = \frac{4c}{5} \tag{5}$$

Din teorema lui Stewart in ΔBDC, avem $BD^2 \cdot EC + DC^2 \cdot BE - DE^2 \cdot BC = BE \cdot EC \cdot BC$, sau $\left(\frac{3b}{4}\right)^2 \cdot \frac{4a}{5} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{5} - DE^2 \cdot a = \frac{4a}{5} \cdot \frac{a}{5} \cdot a$,

$$DE^2 = \frac{25b^2 - 8a^2}{50} \tag{6}$$

Din (5) si (6) rezulta $\frac{25b^2-8a^2}{50} = \frac{16c^2}{25}$,sau

$$25b^2 - 8a^2 = 32c^2 \tag{7}$$

Din (1) si (7), avem:

$$b = c\sqrt{2}, c = \frac{2a}{3} \tag{8}$$

Fie $\{T\} = EF \cap AA'$. Avem $EA' = \frac{a}{2} - \frac{a}{5} = \frac{3a}{10}$. Cum triunghiurile $EA'T$ si $CA'A$ sunt asemenea, rezulta: $\frac{A'T}{AA'} = \frac{A'E}{A'C}$, sau $A'T = \frac{3}{5} \cdot m_a$. Avem:

$$A'A \cdot A'T = m_a \cdot \frac{3m_a}{5} = \frac{3}{5} \cdot m_a^2 \tag{9}$$

Din (8) si teorema medianei, avem: $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{5a^2}{12}$,de unde $A'A \cdot A'T = \frac{a^2}{4} = A'B \cdot A'C$, adica T aparţine cercului circumscris triunghiului ABC.