

Concursul Național de Matematică Aplicată ” Adolf Haimovici ”,

16 februarie 2013

filiera teoretică: profil real: Științe ale naturii

cl. a X-a

Varianta 3

1. Fie numerele  $a = \sqrt[3]{65} - 4$  și  $b = 4 - \sqrt[3]{63}$

a) Calculați cuburile acestor numere

b) Comparați numerele:  $A = \sqrt[3]{1 - 12\sqrt[3]{65^2} + 48\sqrt[3]{65}} + 4$  și  $B = \sqrt[3]{1 - 48\sqrt[3]{63} + 36\sqrt[3]{147}} + \sqrt[3]{63}$

2. Fie  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , cu proprietatea că  $\alpha^3 = 1$ .

a) Calculați  $\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Calculați  $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2013}$ .

c) Fie mulțimile:  $A = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{2013}\}$  și

$B = \{1, 1 + \alpha, 1 + \alpha + \alpha^2, \dots, 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2013}\}$ . Aflați mulțimea  $A \cap B$ .

(prof. Mirela Mațincu)

3. Dacă  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , arătați că:  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ . (1)

Interpretați geometric relația (1).

(\*\*\*)

4. Dacă  $a, b, c > 0$ , demonstrați:

$$\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\lg \frac{b}{c}} + \left(\frac{b^2}{ac}\right)^{\lg \frac{c}{a}} + \left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\lg \frac{a}{b}} \geq 3$$

(Revista de Matematică din Timișoara, nr.1/2012)

(Folosiți eventual inegalitatea:  $\sqrt[3]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ )

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.