Concursul Național de Matematică Aplicată ” Adolf Haimovici ”,

16 februarie 2013

filiera teoretică: profil real: Științe ale naturii

cl. a XII-a

Varianta 3

1. Se consideră mulțimea *G* a matricilor de forma $\begin{pmatrix} a^x & 0 \\ 0 & b^x \end{pmatrix}$, unde $x \in R$.

   a) Arătați că mulțimea *G* formează grup în raport cu înmulțirea matricelor.

   b) Demonstrați că aplicația dată de $x \to \begin{pmatrix} a^x & 0 \\ 0 & b^x \end{pmatrix}$ este un morfism de grupuri între $(G,.)$. și (R, +). Găsiți și inversa acesteia și probați și că aceasta este un morfism de grupuri
2. Să considerăm mulțimea $G = (4, \infty)$și legea definită de $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20, (\forall) x, y \in G$

   a) Arătați că *G* este parte stabilă față de legea„°“ .

   b) Arătați că G este grup abelian. Calculați inversul lui 5.
3. Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) - \frac{2x-x^2}{e^x}$.

   a) Arătați că funcția $F: R \to R, F(x) = \frac{x^2}{e^x}$.este o primitivă a lui *f*.

   b) Să se arate că orice primitivă a funcției *f* este strict crescătoare pe intervalul (0,2).

   c) Arătați că orice primitivă a funcției *f* are două puncte de extrem.

   d) Arătați că funcția *F* este concavă pe intervalul (1,3).
4. Aratati ca functia urmatoare admite primitive si calculati o primitiva a sa :

$$f: [0, \infty) \to R, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, x \in [0,1) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x \in [1, \infty) \end{cases}$$

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.