INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CONSTANȚA

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 16.02.2013

filiera teoretică: profil umanist, toate specializările

Clasa a XII-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1

(1p) Identificarea necunoscutelor

a = numărul notelor de 7 luate de Dana egal cu numărul notelor de 10 luate de Mihai

b = numărul notelor de 8 luate de Dana egal cu numărul notelor de 7 luate de Mihai

c = numărul notelor de 9 luate de Dana egal cu numărul notelor de 8 luate de Mihai

d = numărul notelor de 10 luate de Dana egal cu numărul notelor de 9 luate de Mihai

(2p) $\frac{7a+8b+9c+10d}{40} = \frac{10a+7b+8c+9d}{40}$ media notelor

(1p) Din egalarea mediilor, $7a+8b+9c+10d = 10a+7b+8c+9d$.

Din $b+c+d=3a$ şi $a+b+c+d=40$, se obţine $a=10$ (3p).

Subiectul 2

a) (2p) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-y & y-1 \\ 2-2y & 2y-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-xy & xy-1 \\ 2-2xy & 2xy-1 \end{pmatrix}=A(xy)$

b) (3p)Inducţie matematică. Pentru $n=2$, din punctul anterior, pentru $x=y$, se obţine $A^2(x)=A(x^2)$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$ (1p). Pentru etapa de demonstraţie, folosind ipoteza de inducţie, punctul anterior şi proprietatea de asociativitate a înmulţirii matricelor, se obţine $A^{k+1}(x)=A^k(x)\cdot A(x)=A(x^k)\cdot A(x)=A(x^k\cdot x)=A(x^{k+1})$.

c) (2p)Din punctul anterior, $A^{2013}(x)=A(x^{2013})=I_2=A(1)$, de unde $x^{2013}=1$ şi cum $x\in\mathbf{R}$, se determină soluţia unică $x=1$.

Subiectul 3

a) (2p) $f(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(-1)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t(f(1))=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, de unde rezultă că

${}^t(f(1))+f(1)-2f(-1)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 12 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

b) (3p) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2+x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=(0)$ implică $\begin{pmatrix} 1 & x+1 & 2x^2+6x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=(0)$, de unde

$2x^2+5x+2=0$ (2p).Rezolvarea ecuaţiei şi determinarea soluţiilor $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$ (1p).

c) (2p)

$$f(x)\cdot f(y)=\begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2+x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & y & 2y^2+y \\ 0 & 1 & 4y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x+y & 2x^2+x+2y^2+y+4xy \\ 0 & 1 & 4x+4y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & x+y & 2(x+y)^2+(x+y) \\ 0 & 1 & 4(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=f(x+y)$$

pentru orice $x, y\in\mathbf{R}$.

Subiectul 4

(2p) Alege matricea $X \in M_2(\mathbf{R})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ şi determină

$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$.

(2p) Identificarea coeficienţilor $\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 8 \\ bc + d^2 = 9 \end{cases}$ şi deducerea lui $b = 0$ şi $a + d \neq 0$.

(1p) Rezolvarea sistemului $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 0 \\ c(a + d) = 8 \\ d^2 = 9 \end{cases}$.

(2p) Cele patru soluţii $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.