OLIMPIADA DE MATEMATICĂ NEAMȚ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013

CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

Fie numerele reale a, b, x, y ce verifică relațiile $x+y=a+b$ și $x^2+y^2=a^2+b^2$. Arătați că $x^{2013}+y^{2013}=a^{2013}+b^{2013}$.

Subiectul 2.

Se consideră $E(m;n)=\sqrt{3\cdot 5^m+25^n}$, unde $m,n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că $E(2013;1006)\in\mathbb{Q}$ şi $E(1006;2013)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
b) Arătaţi că există o infinitate de perechi $(m;n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ astfel încât $E(m;n)\in\mathbb{Q}$.
c) Arătaţi că există o infinitate de perechi $(m;n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ astfel încât $E(m;n)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Subiectul 3.

Fie trapezul isoscel ABCD, AB||CD, AB=12cm, CD=6cm, m(A)=60° şi înălţimea CE, E∈AB. Îndoim trapezul după CE, astfel încât planul (ACD) devine perpendicular pe planul (BEC). Determinaţi tangenta unghiului format de planele (ABD) şi (EBC).

Subiectul 4.

Putem aşeza numerele 6, 19, 21, 27, 34, 43, 59 şi 76 în vârfurile unui cub astfel încât fiecare sumă obţinută prin adunarea numerelor situate la capătul unei laturi a cubului să fie un număr divizibil cu 5? Justificaţi.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 3 ore

Bareme

Subiectul 1.

Ridicând prima relație la pătrat și combinând cu a doua obținem $2xy = 2ab$ …2p

Combinând această relație cu a doua din ipoteză obținem $(x-y)^2 = (a-b)^2$ …1p

Obținem astfel $|x-y| = |a-b|$, deci $x - y = \pm(a-b)$ …1p

În unul din cazuri obținem (combinând cu prima relație) $x = a$ și $y = b$ …1p

În celălalt caz $x = b$ și $y = a$ …1p

Concluzia …1p

Subiectul 2

a) $E(2013;1006) = \sqrt{3\cdot 5^{2013} + 25^{1006}} = \sqrt{5^{2012}(3\cdot 5+1)} = \sqrt{16\cdot 5^{2012}} = 4\cdot 5^{1006} \in \mathbb{Q}$. …1p

$E(1006;2013) = \sqrt{3\cdot 5^{1006} + 25^{2013}} = \sqrt{5^{1006}\left(3+5^{3020}\right)} = 5^{503}\sqrt{3+5^{3020}}$

$U\left(3+5^{3020}\right) = 8 \Rightarrow 3+5^{3020}$ nu este pătrat perfect deci $E(1006;2013) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ …2p

b) Considerând $m = 2n+1$ obţinem

$E(m;n) = \sqrt{3\cdot 5^{2n+1} + 5^{2n}} = \sqrt{5^{2n}(3\cdot 5+1)} = 5^n\cdot 4 \in \mathbb{Q}$.

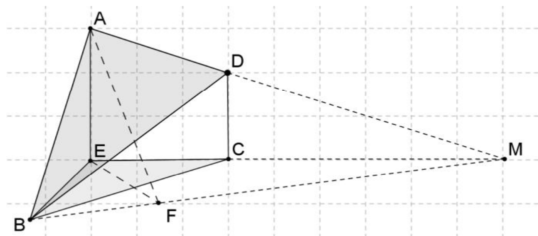
Există o infinitate de perechi $(m;n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, cu $m = 2n+1$ …2p

c) Fie $m = 2k < 2n, k \in \mathbf{N}$ şi obţinem $E(m;n) = \sqrt{5^{2k}\left(3+5^{2n-2k}\right)} = 5^k\sqrt{3+5^{2n-2k}}$

$U\left(3+5^{2n-2k}\right) = 8 \Rightarrow 3+5^{2n-2k}$ nu este pătrat perfect.

Există o infinitate de perechi $(m;n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, cu $m = 2k < 2n, k \in \mathbf{N}$ …2p

Subiectul 3.



Găsirea dreptei de intersecţie BM … 2p.

Construirea unghiului plan asociat diedrului: AFE … 2p.

Calculul tangentei unghiului … 3p.

Subiectul 4.

Fiecare vârf este legat de alte 3 vârfuri, deci pentru oricare dintre numerele din şir trebuie să găsesc alte 3 numere astfel încât sumele obţinute să fie divizibile cu 5. …3p

Pentru 27 <u>doar</u> numărul 43 este convenabil. ……… 3p.

Concluzie: nu putem aşeza ……… 1p.

Obs. O demonstraţie mai generală se referă la faptul că din cele 8 numere 4 trebuie să fie de forma 5k+1 şi 4 de forma 5k+4 <u>sau</u> 4 trebuie să fie de forma 5k+2 şi 4 de forma 5k+3 (sau toate divizibile cu 5).

Obs. O demonstraţie care face referire la faptul că suma celor 8 numere este un număr divizibilă cu 5, deci <u>s-ar putea</u> aşeza cele 8 numere în vârfurile cubului nu se punctează.