

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 16 februarie 2013

Clasa a IX-a

1. a) Demonstrați că $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
 b) Determinați șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ având termenii strict pozitivi cu proprietatea $\frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{2n+1}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. a) Demonstrați că $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$;
 b) Să se arate că $x^2 + y^2 + z^2 + t(xy + yz + zx) \geq 0$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $t \in [-1, 2]$.

Gazeta Matematică – nr.9/2012
3. Se consideră un triunghi ABC și M un punct interior. Notăm cu G_A , G_B , respectiv G_C centrele de greutate ale triunghiurilor $\triangle MBC$, $\triangle MAC$ și, respectiv $\triangle MAB$.
 a) Demonstrați că triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle G_A G_B G_C$ sunt asemenea;
 b) Demonstrați că triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle G_A G_B G_C$ au același centru de greutate dacă și numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC$.
4. a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x - y| < \frac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $x = y$.
 b) Considerăm $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu termenii strict pozitivi și rația nenulă. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $[xa_n] = [ya_n]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $x = y$. (cu $[z]$ s-a notat partea întreagă a numărului real z)

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 16 februarie 2013

Clasa a X-a

1. Determinați toate soluțiile reale ale următoarelor ecuații:

a) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1} = 2$;

b) $\frac{x^2+1}{x} = 2^{x(2-x)}$.

2. Fie $a, b, c \in (0, 1)$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $a = (bc)^x$, $b = (ca)^y$ și $c = (ab)^z$. Demonstrați că:

a) $x, y, z > 0$;

b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$;

c) $\frac{1}{x+y+2} + \frac{1}{y+z+2} + \frac{1}{z+x+2} \leq 1$.

3. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincte astfel încât $(a+b)^3 = (b+c)^3 = (c+a)^3$. Demonstrați că $a^3 = b^3 = c^3$.

Gazeta Matematică – nr.9/2012

4. Fie $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care îndeplinește condițiile:

i) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$;

ii) $f(0) \neq 0$ și $f(1) = \frac{5}{2}$.

a) Demonstrați că funcția f este pară;

b) Determinați funcția f .

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 16 februarie 2013

Clasa a XI-a

1. Pentru orice $x, y \in [0, \infty)$ considerăm determinantul $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$.
- a) Demonstrați că $\Delta(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in [0, \infty)$;
- b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Delta(x, 1)}{\ln(x^3 - 3x + 3)}$.
2. a) Dați exemplu de două șiruri de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- b) Dați exemplu de două șiruri de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ nu există.
3. a) Fie $X \in M_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ există $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ astfel încât $X^n = a_n X + b_n I_2$;
- b) Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB - BA = A$. Demonstrați că $A^2 = O_2$ și $AB^n A = O_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- Gazeta Matematică – nr.11/2012**
4. Considerăm numerele reale $a, b > 0$. Definim șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prin relațiile:
- $$a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n b_n}}{2}, b_{n+1} = \frac{b_n + \sqrt{a_n b_n}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
- a) Demonstrați că șirurile sunt convergente și au aceeași limită;
- b) Calculați limita celor două șiruri.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 16 februarie 2013

Clasa a XII-a

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție " \circ " definită pe \mathbb{R} prin relația $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că (\mathbb{R}, \circ) este monoid comutativ;
 - Determinați numerele reale x cu proprietatea $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 2013 ori de } x} = x$.
2. a) Calculați $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
- b) Calculați $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$.
3. Fie (G, \cdot) un grup finit comutativ și notăm cu e elementul său neutru. Fie $M = \{x \in G \mid x^2 = e\}$.
- Demonstrați că M reprezintă un subgrup a grupului (G, \cdot) ;
 - Arătați că $\prod_{x \in G} x = \prod_{x \in M} x$;
 - Spunem că un element $a \in G$ are proprietatea „A” dacă există un subgrup H a lui (G, \cdot) astfel încât $\prod_{x \in H} x = a$.
Demonstrați că mulțimea $\{a \in G \mid a \text{ are proprietatea "A"}\}$ este subgrup a grupului (G, \cdot) .
- Gazeta Matematică – nr.9/2012(enunț modificat)**
4. Fie funcțiile $f : [0,1] \rightarrow [0, \infty)$ și $g : [0,1] \rightarrow (0, \infty)$ integrabile. Definim șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prin $a_n = \int_0^1 f^n(x)g(x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dacă f este continuă, demonstrați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă $f(x) \leq 1$;
 - Demonstrați că există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.