

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a IX-a

Problema 1. Rezolvați ecuația $13\{x\}^2 - 1013x + 2013\{x\} = 0$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x .

Manuela Stroe și Iulian Stroe, Balș

Problema 2. În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele P și Q astfel încât $\overrightarrow{DP} = p \cdot \overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{BQ} = q \cdot \overrightarrow{BC}$, unde $p, q \in \mathbb{R}$.

Arătați că punctele A, P și Q sunt coliniare dacă și numai dacă $pq = 1$.

Titu Vîrban, Caracal

Problema 3. Fie progresiile aritmetice $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$. Arătați că șirul $(z_n)_{n \geq 1}$, definit prin $z_n = x_n \cdot y_n$, este o progresie aritmetică dacă și numai dacă cel puțin una dintre progresiile $(x_n)_{n \geq 1}$ sau $(y_n)_{n \geq 1}$ este constantă.

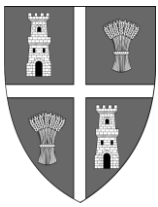
Dan Brânzei

Problema 4. Fie H ortocentrul și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Se notează cu O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HCA , respectiv HAB .

Arătați că $\overrightarrow{OO_a} + \overrightarrow{OO_b} + \overrightarrow{OO_c} = 2\overrightarrow{OH}$.

Costel Anghel, Scornicești

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a X-a

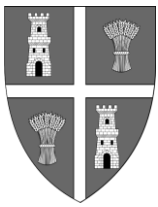
Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\sqrt[3]{3 \cdot 2^x - 6} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^x - 4} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^x - 4} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^x - 6}.$$

*B.T.S.***Problema 2.** Se consideră numerele $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, astfel încât $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.**a)** Demonstrați că $|z_1 + z_2 + z_3| \in \mathbb{N}$.**b)** Determinați numerele date dacă $z_1 \cdot z_2 = 1$ și $z_3 \in \mathbb{R}$.*Iacob Didraga***Problema 3.** Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} \log_2 x_1 = \log_5(x_2 + x_3 + 1) \\ \log_2 x_2 = \log_5(x_3 + x_1 + 1) \\ \log_2 x_3 = \log_5(x_1 + x_2 + 1) \end{cases}$$
*Dorel Barbu, Timișoara***Problema 4.** Determinați funcțiile bijectivă $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cu proprietatea că

$$f(2x - f(x)) = x, \text{ pentru orice } x \in [0, 1].$$

*Dincă Pepino, Caracal***NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 + 4A + 2013I_2 = \begin{pmatrix} 2018 & 7 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$.

Arătați că $(A - I_2)^p = O_2$, pentru orice număr natural $p \geq 2$.

Gabriela Ionică și Eduard Buzdugan, Slatina

Problema 2. Se consideră mulțimea G formată din toate matricele de ordin 3, cu elementele din mulțimea $\{-1, 1\}$, astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie, respectiv coloană, este egal cu -1 .

a) Demonstrați că numărul elementelor egale cu -1 ale unei matrice din G este 3, 5 sau 9.

b) Demonstrați că dacă o matrice $A \in G$ este inversabilă, atunci $A^{-1} \notin G$.

c) Determinați mulțimea valorilor funcției $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(X) = \det X$.

S.L.T.

Problema 3. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - n \right)$.

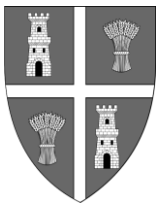
[***]

Problema 4. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, definit prin $a_0 = x \in \mathbb{R}$ și $a_n = \frac{1}{n} - a_{n-1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Determinați valorile lui x pentru care șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

Florian Dumitrel, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Calculați integrala

$$I = \int_0^1 a^{x^3+3x} \cdot \ln a^{x^5+4x^3+3x} dx.$$

Titu Virban, Caracal

Problema 2. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/4} \cos x \cdot \cos x^n dx.$$

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 3. a) Se consideră inelele finite A_1 și A_2 cu proprietatea că numărul elementelor inversabile din A_1 este diferit de numărul elementelor inversabile din A_2 . Arătați că cele două inele nu sunt izomorfe.

b) Dați exemplu de două inele finite cu același număr de elemente inversabile.

Mihai George, Slatina

Problema 4. Fie mulțimea $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m, n \text{ impare} \right\}$ și $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G se definește legea

de compoziție: $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2)$, $\forall q_1, q_2 \in Q_0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

a) Calculați $(1, 1) * (1, 2) * \dots * (1, 10)$.

b) Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

c) Arătați că grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{Q}^*, \cdot) sunt izomorfe.

S.L.T.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.