COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2013

Clasa a V-a

1. Se consideră mulțimile $A=\left\{x_n \middle| x_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n+57,\ n\in \mathbb{N}^*\right\}$ și $B=\left\{y^4 \middle| y\in \mathbb{N}\right\}$.

a) Demonstrați că $x_9 \notin B$.

b) Determinați mulțimea $A\cap B$.

2. Se consideră numărul natural $a = 1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{2009}$.
a) Demonstrați că numărul a este par.
b) Demonstrați că numărul a este divizibil cu 13.
c) Aflați restul împărțirii numărului b prin 13, unde $b=a+3^{2010}+3^{2011}$.

3. a) Determinați restul împărțirii unui număr natural prin 42, știind că prin împărțire la 6 dă restul 5 iar prin împărțire la 7 dă restul 3.

b) Arătați că numărul $21^{33}\cdot 33^{77}\cdot 77^{21}$ este pătrat perfect.

4. Determinați numerele naturale a, $\overline{bcd}$ și e, știind că $4\cdot\left(2^{2a}\cdot 3^a+\overline{bcd}\right)+2^e=2013$.

Subiect elaborat de prof. Alice Anița

Clasa a VI-a

1. Măsurile unghiurilor formate în jurul unui punct O sunt exprimate (în grade) prin puteri ale numărului 5. Aflați numărul minim de unghiuri în condițiile date.

2. Pe o dreaptă se iau, în această ordine, punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$, astfel încât $A_1A_2=6$ cm, $A_2A_3=12$ cm, $A_3A_4=18$ cm ș.a.m.d.

a) Ce lungime are segmentul $[A_1A_{20}]$? Dar segmentul $[A_{15}A_{20}]$?

b) Determinați $i\in\mathbb{N}^*$ pentru care $M\in[A_iA_{i+1}]$, unde M este mijlocul lui $[A_1A_{20}]$.

3. a) Fie p un număr prim mai mare decât 5. Determinați ultima cifră a lui p^4.

b) Aflați numerele prime p și q, știind că $p^4+q^4=29186$.

4. a) Determinați numerele naturale a și b, dacă $[a, b]-(a, b) = 34$.

b) Scrieți mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ ca reuniune de 500 de submulțimi disjuncte două câte două, astfel încât suma elementelor fiecărei submulțimi să fie pătrat perfect.

Subiect elaborat de prof. Valentina Blendea

Clasa a VII-a

1. Determinați mulțimea $A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid x+y=1,\ x^2+2x+y^2=9\}$.

2. Fie $ABCD$ un paralelogram. Printr-un punct oarecare $P\in(AB)$ se duc paralele la dreptele BD şi AD, care intersectează AD în E, respectiv BD în F. Dacă Q şi S sunt mijloacele segmentelor AD, respectiv BC, arătați că dreptele EF, DP şi QS sunt concurente.

3. În exteriorul triunghiului ascuțitunghic ABC se construieşte pătratul $BCDE$. Notăm cu M şi N punctele de intersecție dintre dreapta BC şi dreptele AD, respectiv AE. Perpendicularele în N şi M pe BC taie AB respectiv AC în P, respectiv Q. Demonstrați că $MNPQ$ este pătrat şi calculați perimetrul său în funcție de $a=BC$ şi $h=d(A,BC)$.

4. Dacă a, b şi c sunt numere reale pozitive, demonstrați că are loc inegalitatea

$$\frac{a^3+a}{b^2}+\frac{b^3+b}{c^2}+\frac{c^3+c}{a^2}\geq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right).$$

Subiect elaborat de prof. Valerica Bența

Clasa a VIII-a

1. a) Verificați identitatea $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinați partea întreagă a numărului

$$a=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2012^2}+\frac{1}{2013^2}}.$$

2. Dacă $x, y, z, t\in(0,\infty)$ sunt astfel încât $xz=yt=20$, demonstrați că

$$(x+4)\cdot(y+4)\cdot(z+5)\cdot(t+5)\geq 80^2.$$

3. Pe planul triunghiului dreptunghic ΔABC, $m(\sphericalangle A)=90°$, se ridică, de aceeaşi parte, perpendicularele AM şi BN. Ştiind că $AB=2\sqrt{3}$ cm, $AC=4$cm, $AM=2$cm şi $BN=1$cm, determinați distanța de la punctul M la dreapta de intersecție a planelor (ABC) şi (MNC).

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a; notăm $A'C'\cap B'D'=\{O'\}$ şi $DB'\cap BO'=\{I\}$.

a) Demonstrați că $(IA')\equiv(IB)\equiv(IC')$.

b) Arătați că $DI\perp(A'BC')$.

c) Calculați lungimea segmentului DI.

Subiect elaborat de prof. Sergiu Prisacariu