COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2013

Clasa a IX-a

1. Calculați suma $S=\left\lfloor\sqrt{1\cdot 2}\right\rfloor+\left\lfloor\sqrt{2\cdot 3}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\sqrt{n\cdot(n+1)}\right\rfloor$, funcție de $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Arătați că punctele *A*, *B* și *C* sunt coliniare dacă și numai dacă pentru orice punct *M* din plan, există numerele reale *a*, *b*, *c*, nu toate nule, având suma zero, astfel încât

$$a\cdot\overrightarrow{MA}+b\cdot\overrightarrow{MB}+c\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

3. Fie $a=2+2\sqrt{3}$, $b=2-2\sqrt{3}$ și $S_n=a^n+b^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $S_{n+2}=4S_{n+1}+8S_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;

b) $S_n\in\mathbb{N}^*$, 2^{3n-1} divide S_{2n-1} și 2^{3n+1} divide S_{2n}, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

4. Fie ΔABC și punctele $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$, $C'\in(AB)$ astfel încât cevienele AA', BB' și CC' sunt concurente în *M*. Arătați că:

a) $\dfrac{MA}{MA'}\cdot\dfrac{MB}{MB'}\cdot\dfrac{MC}{MC'}\geq 8$;

b) *M* este centrul de greutate al triunghiului dacă și numai dacă $\dfrac{MA}{MA'}\cdot\dfrac{MB}{MB'}\cdot\dfrac{MC}{MC'}=8$.

Subiect elaborat de prof. Sergiu Prisacariu

Clasa a X-a

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $(f\circ f)(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) funcția *f* este bijectivă;

b) funcția *f* nu este strict monotonă;

c) $f(0)=0$.

2. Pentru $a,b\in(0,1)$, arătați că are loc inegalitatea $\log_a\dfrac{2ab}{a+b}\cdot\log_b\dfrac{2ab}{a+b}\geq 1$.

3. Fie *ABC* un triunghi echilateral înscris într-un cerc de rază 1, iar *M* un punct oarecare pe cerc. Demonstrați că $MA^2+MB^2+MC^2=6$.

4. Dacă *m*, *n* sunt numere naturale cel puțin egale cu 2, demonstrați că

$$\frac{1}{2\sqrt[m]{1}}+\frac{1}{3\sqrt[m]{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt[m]{n}}<m.$$

Subiect elaborat de prof. Gabriela Zanoschi

Clasa a XI-a

1. Dacă α este un număr real oarecare, arătați că există un şir de numere reale, având oricare doi termeni distincți, convergent la α.

2. Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ definite recurent prin $x_1 = 4, y_1 = 1$,

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că şirurile date sunt convergente şi determinați limitele lor.

3. Fie *A* o matrice pătratică de ordin 3, cu toate elementele din mulțimea $\{-1,1\}$.

a) Determinați valorile posibile ale determinantului matricei *A*.

b) Demonstrați că matricea $A^n, n \in \mathbb{N}^*$, are toate elementele nenule.

4. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB - BA = A$. Demonstrați că $ABA = AB^2A = O_2$.

Marian Cucoaneş, Gazeta Matematică 11/2012

Subiect elaborat de prof. Cristian Lazăr

Clasa a XII-a

1. a) Demonstrați că arctg x + arctg $\frac{1}{x}$ = $\frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x > 0$.

b) Pentru $a > 1$, calculați $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{arctgx}{x} dx$.

2. Fie $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă şi $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & f(x) \\ 0 & x \end{pmatrix} | \ x \in (0,\infty) \right\}$. Determinați funcțiile *f* pentru care *M* este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică, neconstantă şi care admite primitive.

a) Demonstrați că orice primitivă a funcției *f* se poate scrie ca sumă dintre o funcție periodică şi o funcție de tipul $G:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ G(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției *f*, calculați $L = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x}$.

c) Arătați că nu există limita $\lim_{x\to\infty}(F(x) - Lx)$.

Radu Gologan

4. Fie *G* un grup de ordin $n, n \geq 4$, cu proprietatea că există $m \in \mathbb{N}, 1 < m < n$, astfel încât *G* conține exact C_{n-1}^{m-1} subgrupuri de ordin m. Demonstrați că grupul *G* este abelian.

Marius Tărnăuceanu, Recreații Matematice 1/2009

Subiect elaborat de prof. Gabriel Popa