COLEGIUL NAȚIONAL IAŞI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2013

Clasa a V-a

1. a) Ultima cifră a numărului x_9 este 7, deci x_9 nu este pătrat perfect. Cum B conține numai pătrate perfecte, înseamnă că $x_9 \notin B$.

b) Dacă $n \geq 5$, atunci $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 57 = \overline{\ldots 7} \neq y^4, \forall y \in \mathbb{N}$. Pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, x_n are, corespunzător, valorile 58, 59, 63 şi 81. Singurul dintre aceste numere care aparține lui B este 81, prin urmare $A \cap B = \{81\}$.

2. a) Suma dată are număr par de termeni impari, deci este număr par.

b) Grupând câte trei termenii sumei, obținem:

$$a = \left(1+3+3^2\right)+\left(3^3+3^4+3^5\right)+\ldots+\left(3^{2007}+3^{2008}+3^{2009}\right)=13\left(1+3^3+3^6+\ldots+3^{2007}\right) \vdots 13.$$

c) Avem că $b = 1+3+\left(3^2+3^3+3^4\right)+\ldots+\left(3^{2009}+3^{2010}+3^{2011}\right) = 4 + 13\left(3^2+3^5+\ldots+3^{2009}\right)$, deci $b = 13c + 4$, cu $4 < 13$. Rezultă că restul cerut este 4.

3. a) Folosind teorema împărțirii cu rest deducem că $n = 6a + 5$, respectiv $n = 7b + 3$. Atunci $7n = 42a + 35$, iar $6n = 42b + 18$. Prin scădere, obținem că $n = 42c + 17$, cu $17 < 42$, deci restul căutat este 17.

b) $21^{33} \cdot 33^{77} \cdot 77^{21} = 3^{110} \cdot 7^{54} \cdot 11^{98} = \left(3^{55} \cdot 7^{27} \cdot 11^{49}\right)^2$.

4. Întrucât $4 \cdot \left(2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bcd}\right)$ este par şi 2013 este impar, rezultă că 2^e este impar, aşadar $e = 0$. Atunci $2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bcd} = 503$, adică $12^a + \overline{bcd} = 503$. Deducem că $a \leq 2$ şi, considerând cele trei situații, găsim soluțiile $\left(a, \overline{bcd}\right) \in \{(0, 502), (1, 491), (2, 359)\}$.

Clasa a VI-a

1. Pentru a avea un număr cât mai mic de unghiuri, trebuie ca măsurile acestora să fie cât mai mari. Putem lua cel mult două unghiuri de măsură 125° (şi vom lua chiar două!), cel mult patru unghiuri de măsură 25° (şi vom lua exact patru) şi, în final, încă două unghiuri cu măsura de 5°. Numărul minim de unghiuri în condițiile problemei este, deci, opt.

2. a) $A_1A_{20} = 6 \cdot (1+2+\ldots+19) = 1140$ cm, iar $A_{15}A_{20} = 6 \cdot (15+16+\ldots+19) = 510$ cm.

b) Conform punctului a), avem că $A_1M = 570$ cm; atunci

$$M \in [A_iA_{i+1}] \Leftrightarrow A_1A_i \leq A_1M \leq A_1A_{i+1} \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{(i-1)i}{2} \leq 570 \leq 6 \cdot \frac{i(i+1)}{2},$$

iar acest lucru se întâmplă doar pentru $i = 14$.

3. a) Cum p se poate termina doar în 1, 3, 7 sau 9, p^2 se va termina în 1 sau în 9, deci p^4 va avea întotdeauna ultima cifră 1.

b) Dacă p şi q ar fi ambele mai mari decât 5, suma din membrul stâng ar avea ultima cifră 2, contradicție. Presupunând că p este numărul mai mic, el nu poate fi 2, din considerente de paritate, nici 3, din cauza ultimei cifre. Rămâne că $p=5$ şi atunci $q^4=28561$, de unde $q=13$.

4. a) Fie $d=(a,b)$; atunci $a=dx, b=dy$, cu $x,y\in\mathbb{N}, (x,y)=1$, iar $[a,b]=dxy$. Evident, d trebuie să fie divizor al lui 34, adică $d\in\{1,2,17,34\}$. Considerând fiecare caz în parte, obținem soluțiile: $(a,b)\in\{(1,35),(5,7),(7,5),(35,1);(2,36),(4,18),(18,4),(36,2);(17,51),(51,17);(34,68),(68,34)\}$.

b) De exemplu, putem considera următoarea partiție a lui A:

$$\{1,224\},\{2,223\},...,\{112,113\},\{225,1000\},\{226,999\},...,\{612,613\}.$$

Clasa a VII-a

1. Înlocuind $y=1-x$ în egalitatea $x^2+2x+y^2=9$, obținem că $x^2=4$, de unde $x=\pm 2$. Deducem că $A=\{(2,-1),(-2,3)\}$.

2. Cum $DEPF$ este paralelogram, segmentele DP şi EF au acelaşi mijloc M. Pe de altă parte, $QS \parallel AB$ şi $QM \parallel AB$ (deoarece QM este linie mijlocie în triunghiul DAP), prin urmare punctele Q,M,S sunt coliniare. Rezultă că dreptele EF, DP şi QS sunt concurente în M.

3. Prelungim înălțimea AS a triunghiului ABC până când întâlneşte DE în T şi notăm lungimea segmentului ET cu x. Din $\Delta ANS\sim\Delta AET$ deducem că $NS=\dfrac{xh}{a+h}$, iar din $\Delta AMS\sim\Delta ADT$ obținem că $MS=\dfrac{(a-x)h}{a+h}$; astfel, $MN=MS+NS=\dfrac{ah}{a+h}$. Deoarece $\Delta BNP\sim\Delta BSA$, rezultă că $\dfrac{PN}{AS}=\dfrac{BN}{BS}$, deci $\dfrac{PN}{h}=\dfrac{a}{a+h}$, prin urmare $PN=\dfrac{ah}{a+h}$. Analog se arată că $MQ=\dfrac{ah}{a+h}$. Patrulaterul $MNPQ$ are unghiurile $\sphericalangle M$ şi $\sphericalangle N$ drepte şi laturile PN, MN şi MQ egale; atunci acest patrulater este pătrat, iar perimetrul său este $\dfrac{4ah}{a+h}$.

4. Deoarece $x^3+x\geq 2x^2, \forall x>0$, ar fi destul să demonstrăm că $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\geq\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}$. Această din urmă inegalitate se obține din binecunoscuta $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, în care considerăm $x=\dfrac{a}{b}, y=\dfrac{b}{c}, z=\dfrac{c}{a}$.

Clasa a VIII-a

1. a) Se ridică la pătrat în ambii membri.

b) Folosind punctul a) şi procedeul de sumare telescopică, obținem că $a = 2013 - \frac{1}{2013}$, deci $\lfloor a \rfloor = 2012$.

2. Pentru fiecare dintre paranteze, aplicăm inegalitatea mediilor $\text{MA} \geq \text{MG}$; obținem că produsul din membrul stâng este cel puțin egal cu $2^4 \cdot \sqrt{4x \cdot 4y \cdot 5z \cdot 5t} = 80^2$, conform ipotezei. Egalitatea se atinge când $x = y = 4$, iar $z = t = 5$.

3. Dacă $\{D\} = AB \cap MN$, atunci $(ABC) \cap (MNC) = CD$. Din $\Delta AMD \sim \Delta BND$ obținem că $AD = 4\sqrt{3}$ cm, deci $CD = 8$ cm. Fie *AT* înălțimea triunghiului dreptunghic *ACD*; avem că $AT = \frac{AC \cdot AD}{CD} = 2\sqrt{3}$ cm. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $MT \perp CD$ şi, din triunghiul dreptunghic *AMT*, găsim că distanța de la *M* la dreapta *CD* este de 4 cm.

4. a) Triunghiul $BA'C'$ este echilateral, iar *I* se află pe mediana BO'. Deoarece $\Delta IBD \sim \Delta IO'B'$, rezultă că $\frac{IB}{IO'} = \frac{BD}{B'O'} = 2$, prin urmare *I* este centrul triunghiului $BA'C'$ şi atunci va fi egal depărtat de vârfurile sale.

b) Piramida $DBA'C'$ are baza $BA'C'$ triunghi echilateral şi muchiile laterale congruente, deci este o piramidă regulată. Dreapta care uneşte vârful *D* cu centrul *I* al bazei este înălțimea piramidei, aşadar este perpendiculară pe planul bazei.

c) Asemănarea $\Delta IBD \sim \Delta IO'B'$ conduce la $\frac{DI}{IB'} = \frac{BD}{B'O'} = 2$, deci $DI = \frac{2}{3} DB' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.