COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2013

Clasa a IX-a

1. Întrucât $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\lfloor n(n+1) \rfloor = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. În aceste condiții, $S = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Observăm că: A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^*$ a.î. $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^*$ a.î. $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = t \cdot \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^*$ a.î. $(t-1)\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - t\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, prin urmare este adevărată cerința problemei.

3. a) Observăm că $a + b = 4$, iar $ab = -8$; rezultă că $4S_{n+1} + 8S_n = (a+b)\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right) - ab\left(a^n + b^n\right) = a^{n+2} + b^{n+2} + ab\left(a^n + b^n\right) - ab\left(a^n + b^n\right) = S_{n+2}$.

b) Notăm cu $P(n)$ propoziția “$S_{2n-1}, S_{2n} \in \mathbb{N}^*$, 2^{3n-1} divide S_{2n-1} și 2^{3n+1} divide S_{2n}”, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $S_1 = 4$ și $S_2 = 32$, $P(1)$ este adevărată. Presupunem $P(n)$ adevărată și arătăm că este adevărată $P(n+1)$. Avem: $S_{2n+1} = 4S_{2n} + 8S_{2n-1} = 4 \cdot 2^{3n+1} \cdot s + 8 \cdot 2^{3n-1} \cdot t$, cu $s, t \in \mathbb{N}^*$, deci S_{2n+1} este număr natural nenul, divizibil cu 2^{3n+2}. Analog se procedează pentru S_{2n+2}.

4. a) Folosind relația lui Van Aubel și inegalitatea mediilor MA $\geq$ MG, obținem că

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{AC'}{BC'} + \frac{AB'}{CB'} \geq 2\sqrt{\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{AB'}{CB'}}$$

și încă două relații similare. Înmulțind membru cu membru cele trei inegalități și efactuând simplificările, rezultă inegalitatea dorită.

b) Egalitatea se atinge dacă și numai dacă $\frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{CB'}$ și analoagele, adică $B'C' \parallel BC$ și analoagele, i.e. patrulaterele $AC'A'B'$, $BA'B'C'$ și $CB'C'A'$ sunt paralelograme, fapt care se petrece atunci și numai atunci când AA', BB' și CC' sunt medianele triunghiului.

Clasa a X-a

1. a) Dacă funcția compusă $g \circ h$ este injectivă, atunci *h* este injectivă, iar dacă $g \circ h$ este surjectivă, atunci *g* este surjectivă. În cazul nostru, $f \circ f$ este bijectivă, prin urmare *f* este atât injectivă, cât şi surjectivă.

b) Compusa a două funcții strict monotone este funcție strict crescătoare, în timp ce funcția $x \mapsto -x$ este strict descrescătoare, deci *f* nu poate fi strict monotonă.

c) Din ipoteză, rezultă că $-f(x) = f(f(f(x))) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci funcția *f* este impară, de unde $f(0) = 0$.

2. Din inegalitatea mediilor MH≤MG, obținem că $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$. Cum funcția logaritmică de bază subunitară este strict descrescătoare, deducem că $\log_a \frac{2ab}{a+b} \ge \frac{1}{2}\log_a ab$, respectiv $\log_b \frac{2ab}{a+b} \ge \frac{1}{2}\log_b ab$. Rămâne să dovedim că $\log_a ab \cdot \log_b ab \ge 4$, fapt care revine la $\log_a b + \log_b a \ge 2$, iar această inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor MG≤MA.

3. Considerăm un reper cu originea în centrul *O* al cercului circumscris triunghiului şi notăm cu m, a, b, c afixele punctelor M, A, B respectiv *C*. Evident că $|m| = |a| = |b| = |c| = 1$ şi, cum triunghiul *ABC* este echilateral, $a + b + c = 0$. Atunci:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \sum |m-a|^2 = \sum\left(|m|^2 + |a|^2 - m\overline{a} - \overline{m}a\right) =$$
$$= 3|m|^2 + \sum |a|^2 - m \cdot \overline{a+b+c} - \overline{m}(a+b+c) = 3\cdot 1 + 3\cdot 1 + 0 + 0 = 6.$$

4. Majorăm termenul general al sumei: $\frac{1}{(k+1)\sqrt[m]{k}} = \sqrt[m]{k^{m-1}} \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \sqrt[m]{k^{m-1}}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$

$$= \sqrt[m]{k^{m-1}}\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k^{m-1}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[m]{(k+1)^{m-1}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right)\left(1 + \ldots + \sqrt[m]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{m-1}}\right) <$$

$< \left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right) \cdot m$. Rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt[m]{k}} < m \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} - \frac{1}{\sqrt[m]{k+1}}\right) = m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}\right) < m.$$

Clasa a XI-a

1. Este suficient să considerăm şirul $x_n = \alpha + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Din prima relaţie obţinem că $y_n = 3x_{n+1} - 2x_n$, prin urmare $y_{n+1} = 3x_{n+2} - 2x_{n+1}$. Înlocuind în a doua relaţie, deducem că $6x_{n+2} - 7x_{n+1} + x_n = 0$.

Ecuaţia caracteristică a acestei recurenţe este $6r^2 - 7r + 1 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{6}$, aşadar $x_n = A + B \cdot \frac{1}{6^n}$. Cum primii termeni sunt $x_1 = 4, x_2 = 3$, rezultă că $A = \frac{14}{5}, B = \frac{36}{5}$ şi astfel este evident că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir convergent, cu limita $\frac{14}{5}$.

Apoi, $y_n = \frac{14}{5} + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{6^{n-2}}$, prin urmare şi $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent, având aceeaşi limită.

3. a) Dacă adunăm prima linie la liniile 2 şi 3, pe aceste linii vor fi numai numere pare. Scoatem factor 2 de pe fiecare dintre ele şi obţinem că determinantul matricei *A*, care este număr întreg, se divide cu 4.

Însă det*A* este sumă de şase termeni, fiecare egal cu 1 sau cu -1, prin urmare are valoarea cuprinsă între -6 şi 6. Rezultă că $\det A \in \{-4, 0, 4\}$ şi se constată imediat că toate cele trei valori sunt posibile.

b) Se demonstrează uşor, prin inducţie matematică, faptul că matricea A^n are toate elementele impare, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. În particular, toate elementele lui A^n vor fi nenule.

4. Cum matricele *AB* şi *BA* au aceeaşi urmă, rezultă că $trA = tr(AB - BA) = 0$. Ecuaţia caracteristică a matricei *A* conduce la $A^2 = -(\det A) I_2$, prin urmare matricea A^2 comută cu oricare altă matrice; astfel, $A^2B = BA^2$.

Înmulţind relaţia din enunţ cu *A*, la stânga, apoi la dreapta, şi ţinând seama de cele anterioare, deducem că $A^2 = -A^2$, deci $A^2 = O_2$. De aici,

$$ABA = (A + BA)A = (I_2 + B)A^2 = O_2.$$

Ridicăm acum la pătrat ambii membri ai relaţiei din enunţ; obţinem că

$$(ABA)B - AB^2A - BA^2B + B(ABA) = A^2.$$

Deoarece $ABA = A^2 = O_2$, rezultă că $AB^2A = O_2$, ceea ce încheie rezolvarea.

Clasa a XII-a

1. a) Derivata funcției $f(x) = \text{arctg}\, x + \text{arctg}\frac{1}{x},\ x > 0$, este nulă, aşadar f este constantă pe $(0,\infty)$. Cum $f(1) = \frac{\pi}{2}$, rezultă că $f(x) = \frac{\pi}{2},\ \forall x > 0$.

b) Dacă $I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{arctgx}{x}dx$, cu schimbarea de variabilă $\frac{1}{x} = t$ obținem că $I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{arctg\frac{1}{t}}{t}dt$,

deci $I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{arctgx + arctg\frac{1}{x}}{x}dx = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\pi}{2x}dx = \frac{\pi}{2}\ln x\Big|_{\frac{1}{a}}^{a} = \pi \ln a$, prin urmare $I = \frac{\pi \ln a}{2}$.

2. Se observă că $A(x)\cdot A(y) = \begin{pmatrix} xy & xf(y)+yf(x) \\ 0 & xy \end{pmatrix}$. Cum $A(x)\cdot A(y) = A(xy)$, rezultă că $f(xy) = x\cdot f(y) + y\cdot f(x), \forall x \in (0,\infty)$.

Cu notația $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$, obținem că funcția continuă g verifică ecuația funcțională $g(xy) = g(x) + g(y), \forall x \in (0,\infty)$. Atunci $g(x) = k\log_a x$, aşadar $f(x) = kx\log_a x$, $\forall x \in (0,\infty)$, unde $k \in \mathbb{R}, a \in (0,1)\cup(1,\infty)$.

Pentru funcțiile f de această formă, se verifică imediat axiomele grupului.

3. a) Fie F o primitivă a lui f; căutăm $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $H(x) = F(x) - ax$ să fie periodică. Observăm întâi că funcția $g(x) = F(x+T) - F(x)$ are derivata nulă, deci este constantă, adică $F(x+T) - F(x) = k, \forall x \in \mathbb{R}$. Condiția $H(x+T) = H(x), \forall x \in \mathbb{R}$ revine la $aT = k$, unde $k = \frac{F(T) - F(0)}{T}$, deci este suficient să luăm $a = \frac{k}{T}$.

b) Aplicând regula lui l'Hospital (cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$) şi ținând seama de punctul a), obținem că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x} = k$.

c) H este periodică şi neconstantă, deci nu există $\lim\limits_{x\to\infty} H(x)$.

4. Considerăm submulțimile lui G care conțin elementul neutru e şi încă $m-1$ elemente din $G\setminus\{e\}$. Numărul acestor submulțimi este C_{n-1}^{m-1}, deci toate aceste submulțimi sunt subgrupuri ale lui G.

Dacă, prin absurd, $m > 2$, atunci există $x, y \in G\setminus\{e\}, x \neq y$; cum $n-3 \geq m-2 \geq 1$, putem alege $m-2$ elemente distincte din $G\setminus\{e\}$, fie acestea $a_1, a_2, ..., a_{m-2}$. Notăm

$H_1 = \{e, x, a_1, a_2, ..., a_{m-2}\}$ şi $H_2 = \{e, y, a_1, a_2, ..., a_{m-2}\}$. Avem că $xa_1 \in H_1$ (deoarece H_1 este sugrup), $xa_1 \neq e$ (altfel $x = a_1^{-1} \in H_2$), $xa_1 \neq x$ (în caz contrar, $a_1 = e$) şi $xa_1 \neq a_i, i = \overline{2, m-2}$ (altfel $x = a_i a_1^{-1} \in H_2$).

Contradicția la care am ajuns arată că $m = 2$, deci $a^2 = e, \forall a \in G$. Această condiție conduce la comutativitatea lui *G*.