INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CONSTANȚA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 16.02.2013
Clasa a X-a
Barem de corectare și notare

Subiectul 1

Se observă că a_1, a_2, $a_3 > 0$ şi $a_{f(1)} \cdot a_{f(2)} \cdot a_{f(3)} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1$ pentru oricare bijecţie $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$...2p

Avem $\left(a_{f(1)} + 2a_{f(2)} + 3a_{f(3)}\right) \cdot \left(3a_{f(1)} + 2a_{f(2)} + a_{f(3)}\right) =$

$\left(a_{f(1)} + a_{f(2)} + a_{f(2)} + a_{f(3)} + a_{f(3)} + a_{f(3)}\right) \cdot \left(a_{f(1)} + a_{f(1)} + a_{f(1)} + a_{f(2)} + a_{f(2)} + a_{f(3)}\right) \geq$ 2p

$\geq 6\sqrt[6]{a_{f(1)} \cdot a_{f(2)}^2 \cdot a_{f(3)}^3} \cdot 6\sqrt[6]{a_{f(1)}^3 \cdot a_{f(2)}^2 \cdot a_{f(3)}} = 36\sqrt[6]{\left(a_1 a_2 a_3\right)^4} = 36$. Finalizarea 3p

Subiectul 2

a) Inegalitatea mediilor: $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}, \forall a,b \in (0,\infty)$ 1p

Cum $a \in (0,1) \Rightarrow \log_a \dfrac{2ab}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}\left(1 + \log_a b\right) \Rightarrow 1 + \log_a \dfrac{2b}{a+b} \geq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b \Rightarrow$ 1p

$\log_a \dfrac{2b}{a+b} \geq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b \Rightarrow \log_a \dfrac{2b}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}\left(\log_a b - 1\right), \forall a \in (0,1), b \in (0,\infty)$. 1p

b) Dacă $x \in (0,1)$, folosind inegalitatea de la punctul a), obținem relațiile:

$\log_2 \dfrac{2x+1}{4x} = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{4x}{2x+1} = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x}{x+\frac{1}{2}} \geq \dfrac{1}{2}\left(\log_{\frac{1}{2}} x - 1\right)$ (1). 1p

$-\log_x \dfrac{2x+1}{2} = \log_x \dfrac{2}{2x+1} = \log_x \dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} \geq \dfrac{1}{2}\left(\log_x \dfrac{1}{2} - 1\right)$ (2). 1p

Sumând (1) și (2): $0 \geq \dfrac{1}{2}\left(\log_{\frac{1}{2}} x + \log_x \dfrac{1}{2} - 2\right) \geq \dfrac{1}{2}(2-2) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \in (0,1)$ realizează egalitatea în fiecare inegalitate din lanțul de inegalități folosit anterior. 1p

Dacă $x \in (1,\infty)$, atunci: $x > 1 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x+1 < 4x \Rightarrow \dfrac{2x+1}{4x} < 1 \Rightarrow \log_2 \dfrac{2x+1}{4x} < 0$ (3).

De asemenea, avem: $x > 1 \Rightarrow 2x+1 > 3 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{2} > \dfrac{3}{2} > 1 \Rightarrow \log_x \dfrac{2x+1}{2} > 0$ (4).

Din (3) și (4) rezultă că nu există soluții $x \in (1,\infty)$ și deci $x = \dfrac{1}{2}$ este singura soluție a ecuației date.1p

Subiectul 3

$z_n = z_1 \cdot q^{n-1}, (\forall) n \geq 1$. 1p

Fie z_m şi z_p astfel încât $\dfrac{z_m}{z_p} \in \mathbf{R}$. De aici deducem că $q^{m-p} \in \mathbf{R}$. 1p

Fie z_s şi z_t astfel încât $|z_s| = |z_t|$. De aici avem $\left|z_1 q^{s-1}\right| = \left|z_1 q^{t-1}\right| \Rightarrow |q|^{s-t} = 1 \Rightarrow |q| = 1$ 1p

Deci $\left|q^{m-p}\right| = 1$ şi cum $q^{m-p} \in \mathbf{R}$ avem că $q^{m-p} = \pm 1$. 1p

Aşadar există $k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $q^k = 1$ (de exemplu $k = 2 \cdot |m-p|$). 2p

$z_{n+k} = z_1 q^{n+k-1} = z_1 q^{n-1} q^k = z_1 q^{n-1} = z_n$, $\forall n \geq 1$ deci mulţimea $\left\{z_n \mid n \in \mathbf{N}^*\right\}$ este finită.. 1p

Subiectul 4

Din relaţia din enunţ şi ţinând cont de faptul că a, b, c sunt distincte, rezultă că $a+b, b+c, c+a$ sunt distincte şi nenule. 2p

Atunci $\left(\dfrac{a+b}{b+c}\right)^3 = \left(\dfrac{a+b}{c+a}\right)^3 = 1$, de unde $a+b = \varepsilon(b+c) = \varepsilon^2(c+a)$, unde $\varepsilon \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ şi $\varepsilon^3 = 1$. 2p

Adunând membru cu membru relaţiile $a+b = \varepsilon(b+c)$, $b+c = \varepsilon(c+a)$, $c+a = \varepsilon(a+b)$, se obţine că $a+b+c = 0$. 2p

De aici $c = -a-b$, $a = -b-c$, $b = -c-a$, de unde prin ridicare la cub rezultă concluzia.. 1p