INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CONSTANȚA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 16.02.2013

Clasa a X-a

Subiectul 1

Fie $a,b,c>1$ şi $a_1=\log_a b$, $a_2=\log_b c$, $a_3=\log_c a$. Arătaţi că pentru orice funcţie bijectivă $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$, are loc inegalitatea $\left(a_{f(1)}+2a_{f(2)}+3a_{f(3)}\right)\cdot\left(3a_{f(1)}+2a_{f(2)}+a_{f(3)}\right)\geq 36$.

Gabriela Constantinescu

Subiectul 2

a) Să se arate că: $\log_a \dfrac{2b}{a+b}\geq\dfrac{1}{2}\left(\log_a b-1\right),\forall a\in(0,1),b\in(0,\infty)$.

b) Rezolvați ecuația: $\log_2\dfrac{2x+1}{4x}=\log_x\dfrac{2x+1}{2},x\in(0,\infty)-\{1\}$.

Florian Gache

Subiectul 3

Considerăm șirul de numere complexe $(z_n)_{n\geq1}$ cu proprietatea că există $q\in\mathbf{C}^*$ astfel încât $z_n=z_{n-1}\cdot q,\ (\forall)n\geq2$ și $z_1\in\mathbf{C}^*$. Să se arate că dacă există doi termeni cu raportul lor număr real și doi termeni cu modulele egale, atunci mulțimea $\left\{z_n \mid n\in\mathbf{N}^*\right\}$ este finită.

Cătălin Zîrnă

Subiectul 4

Fie numerele complexe distincte a, b, c astfel încât $(a+b)^3=(b+c)^3=(c+a)^3$. Să se arate că $a^3=b^3=c^3$.

Gazeta Matematică

Notă:
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu