OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 16.02.2013
Clasa a XI-a

Subiectul 1
Fie $A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ astfel încât ${}^tA = A$ și ${}^tB = -B$ (s-a notat cu ${}^tX$ transpusa matricei X). Arătați că:

a) $\det(AB - BA) \leq 0$;

b) $\det(A^2 - B^2) \geq 0$.

Nelu Chichirim

Subiectul 2
Fie $A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ cu proprietatea că $AB - BA = A$.

a) Arătați că A nu este inversabilă.

b) Arătați că $AB^nA = O_2$ pentru orice $n \geq 1$.

Gazeta Matematică, enunț adaptat

Subiectul 3
Fie $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$, astfel încât $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$. Pentru $a \in (0,\infty)$ fie şirul

$a_n = f(a) + f\left(\frac{a}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{a}{n}\right)$ pentru oricare $n \geq 1$. Studiaţi convergenţa şirului

$b_n = \left[f(a_1) \cdot f\left(\frac{a_2}{2}\right) \cdot \cdots \cdot f\left(\frac{a_n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$.

Gabriela Constantinescu

Subiectul 4
Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive definit prin:

$$x_1 > 0 \text{ și } \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} = \ln\frac{n+1}{x_{n+1}},\ \forall n \geq 1.$$

a) Arătați că $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este un șir convergent și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Cătălin Zîrnă

Notă:
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu