

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 16.02.2013

Clasa a XII-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot f(x), & x \geq 0 \\ -x \cdot f(x), & x < 0 \end{cases}; \quad f \text{ admite primitive} \Rightarrow \exists F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ derivabilă, cu } F' = f$$

$$x \cdot f(x) = [x \cdot F(x)]' - F(x) \quad 1 \text{ p}$$

F derivabilă $\Rightarrow F$ continuă $\Rightarrow F$ admite primitive. Fie $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă, cu $H' = F$

$$x \cdot f(x) = [x \cdot F(x)]' - H'(x) = [x \cdot F(x) - H(x)]'; \quad -x \cdot f(x) = [-x \cdot F(x) + H(x)]' \quad 2 \text{ p}$$

Definim funcția $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} xF(x) - H(x) + c, & x \geq 0 \\ -xF(x) + H(x) + c', & x < 0 \end{cases}$. F, H sunt derivabile pe $\mathbb{R} \Rightarrow G$

derivabilă pe \mathbb{R}^* și $G' = g$ pe \mathbb{R}^* 1 p

G continuă în $x_0 = 0 \Rightarrow c' = c - 2H(0) \Rightarrow G(x) = \begin{cases} xF(x) - H(x) + c, & x \geq 0 \\ -xF(x) + H(x) + c - 2H(0), & x < 0 \end{cases}$ 1 p

$$G'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{xF(x) - H(x) + c + H(0) - c}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(F(x) - \frac{H(x) - H(0)}{x} \right) = F(0) - H'(0) = F(0) - F(0) = 0$$

$$G'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-xF(x) + H(x) + c - 2H(0) + H(0) - c}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(-F(x) + \frac{H(x) - H(0)}{x} \right) = -F(0) + H'(0) = -F(0) + F(0) = 0$$

$\Rightarrow G$ derivabilă în $x_0 = 0$ și $G'(0) = g(0) = 0$. În concluzie, G e o primitivă pentru g , deci funcția g admite primitive. 2 p

Subiectul 2

$$\text{a) } I_1 = \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \, dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \, dx = \int \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \, dx \quad 1 \text{ p}$$

$$\operatorname{tg} x = t \quad (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = dt, t \in (0, 1) \Rightarrow I_1 = 2 \int \frac{t^2}{(1 - t^2)(1 + t^2)} dt \Rightarrow I_1 = \int \frac{1}{1 - t^2} dt - \int \frac{1}{1 + t^2} dt \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{Deci } I_1 = -\frac{1}{2} \ln \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} - x + c \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{b) } I_{n+4} - I_n = \int (\operatorname{tg}^n x)(\operatorname{tg}^4 x - 1) \cdot \operatorname{tg} 2x \, dx = - \int (\operatorname{tg}^n x) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \, dx$$

$$\text{vezi a) } = -\frac{2 \operatorname{tg}^{n+2} x}{n+2} + c \quad 4 \text{ p}$$

Subiectul 3

- Din comutativitate $\Rightarrow f(x) - 2x = f(y) - 2y, \forall x, y \in R$ 1 p
 $\Rightarrow f(x) - 2x$ este funcție constantă $\Rightarrow f(x) = 2x + a, a \in R$ 2 p
- Din asociativitate $\Rightarrow a = \frac{2}{3}$ 2 p
- Funcția este: $f(x) = 2x + \frac{2}{3}$. Legea este: $x \circ y = 2x + 2y + 3xy + \frac{2}{3}$. Avem: lege internă, comutativă, asociativă 1 p
- Se determină elementul neutru $e = -\frac{1}{3}$ 1 p

Subiectul 4

- a) Se găsesc 3 numere care nu verifică asociativitatea (De exemplu $(2 \circ 3) \circ 5 \neq 2 \circ (3 \circ 5)$) 1 p
- b) Se analizează cazurile $x = 6k, x = 6k + 1, \dots, x = 6k + 5$
Se obțin soluțiile $x = 6k + 1, x = 6k + 2, x = 6k + 5, k \in Z$ 3 p
- c) Se observă (din $x \bmod 3 \in \{0, 1, 2\}$ și $x \bmod 2 \in \{0, 1\}$) că $x \circ y$ nu poate lua alte valori în afară de 0, 1, 2, 3
Deci $H \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ 1 p
Se arată că $1 \notin H$ 1 p
Folosind $1 \notin H$, se arată că $2 \notin H, 3 \notin H$, deci $H = \{0\}$ 1 p