

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapă locală Adjud – 09 februarie 2013
Clasa a V-a

Subiectul I

Se consideră sumele: $S_1 = 1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2011}$

$$S_2 = 1+2+3+\dots+2009$$

Arătați că $S_1 - S_2$ se divide cu 10.

Subiectul II

Suma a trei numere este 240. Dacă din fiecare număr se scade același număr, se obțin numerele 25, 56 și 120. Aflați cele trei numere.

Subiectul III

Se dau numerele: $a = (2^0 + 8^{21} : 16^{15} + 6 \cdot 27^{10} : 81^7)^{63}$

$$b = (2^{2^5} : 2^{5^2} + 1)^{5^4}$$

Care dintre cele două numere este mai mare?

Subiectul IV

Scrieți numărul 9^{2011} ca o sumă de două cuburi perfecte.

E:14253 G.M. 5/2012

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte
- Timp de lucru 2 ore.

CLASA a V-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

Subiectul I

$S_1 = 1+2+2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2011} / \cdot 2$	
$2 \cdot S_1 = 2+2^2 + 2^3 + 2^4 \dots + 2^{2011} + 2^{2012}$	1p
$2 \cdot S_1 - S_1 = S_1 = 2^{2012} - 1$	1p
$S_2 = 1+2+3+\dots+2009 = (2009 \cdot 2010) : 2 = 2009 \cdot 1005$	1p
$u(S_1) = u(2^{2012} - 1) = u(2^{2012}) - 1 = u((2^4)^{503}) - 1 = 6 - 1 = 5$	2p
$u(S_2) = u(2009 \cdot 1005) = 5$	1p
$u(S_1 - S_2) = 0$, deci $S_1 - S_2$ se divide cu 10.	1p

Subiectul II

$a+b+c=240, a-x=25, b-x=56, c-x=120$	2p
$a=x+25, b=x+56, c=x+120$	1p
$(25+x)+(56+x)+(120+x)=240$	
$(25+56+120)+(x+x+x)=240$	1p
$201+3x=240, x=13$	1p
$a=25+13=38, b=56+13=69, c=120+13.$	2p

Subiectul III

$a=(1+2^{63} \cdot 2^{60} + 6 \cdot 3^{30} \cdot 3^{28})^{63}$	1p
$a=(1+2^3+6 \cdot 3^2)^{63} = 63^{63}$	1p
$b=(2^{32} \cdot 2^{25} + 1)^{54} = (2^7 + 1)^{54} = 129^{54}$	2p
$a=63^{63} < 64^{63} = (2^6)^{63} = 2^{378} = (2^7)^{54} = 128^{54} < 129^{54}$.	3p

Subiectul IV

$9 = 1+8=1^3+2^3$	1p
$9^{2011} = 9^{2010} \cdot 9 = 9^{2010} \cdot (1^3 + 2^3) =$	2p
$= (9^{670})^3 \cdot (1^3 + 2^3) = (9^{670})^3 \cdot 1^3 + (9^{670}) \cdot 2^3 =$	2p
$= (9^{670})^3 + (9^{670} \cdot 2)^3$	2p