**Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi**

**Societatea de Ştiinţe Matematice din România** **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

**Filiala Galaţi** **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

**Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIII-a**

**Galaţi, 25 noiembrie 2012**

***Clasa a X-a***

## *SOLUŢII*

**Problema 1.**

**Soluţie.**

Din ipoteză rezultă că $n^n\cdot(n-1)>\sum_{j\neq i}a_j^n$ , pentru orice indice $i\in\{1,2,3,\dots,n\}$ fixat.

Rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{n-1}}{(n-1)\cdot a_i^n+n^n\cdot(n-1)^2+n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{n-1}}{(n-1)\cdot(a_1^n+a_2^n+\dots+a_n^n)+n}=\frac{a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\dots+a_n^{n-1}}{(n-1)\cdot(a_1^n+a_2^n+\dots+a_n^n)+n}$$

Dar $(n-1)\cdot a_i^n+1=\underbrace{a_i^n+a_i^n+\dots+a_i^n}_{n-1\text{ ori}}+1\geq n\sqrt[n]{a_i^{n\cdot(n-1)}}=n\cdot a_i^{n-1},\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$,

De unde, prin sumare, rezultă $(n-1)\cdot(a_1^n+a_2^n+\dots+a_n^n)+n\geq n\cdot(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\dots+a_n^{n-1})$, adică

$$\frac{a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\dots+a_n^{n-1}}{(n-1)\cdot(a_1^n+a_2^n+\dots+a_n^n)+n}\leq\frac{1}{n}$$

**Problema 2.**

**Soluţie.**

**a)** Explicităm, în ordinea crescătoare a indicilor, şirul $(b_m)_{m\geq0}$:

$b_{a_0}=0$,

$b_{a_0+1}$, $b_{a_0+2}$ ,..., $b_{a_1}$ =1,

$b_{a_1+1}$, $b_{a_1+2}$ ,..., $b_{a_2}$ =2, ...

$b_{a_{k-1}+1}$, $b_{a_{k-1}+2}$ ,..., $b_{a_k}$ =k, $\forall$ $k\geq1$ , ...,

$b_{a_{2011}+1}$, $b_{a_{2011}+2}$ ,..., $b_{a_{2012}}$ =2012.

Observaţie: Dacă şirul $(a_n)_{n\geq0}$ conţine termeni consecutivi egali, atunci în mod necesar unele dintre liniile de mai sus nu vor avea niciun termen.

De exemplu, dacă $a_{k-1}=a_k$, atunci de la $b_{a_{k-1}+1}$ până la $b_{a_k}$ nu se află niciun termen ( având în vedere că $a_{k-1}+1$ nu este $\leq a_k$) şi atunci în şirul $(b_m)_{m\geq0}$ nu vor fi termeni egali cu k.

$\sum_{i=1}^{a_{2012}}b_i=1\cdot a_1+2\cdot(a_2-a_1)+\dots+k\cdot(a_k-a_{k-1})+\dots+2012\cdot(a_{2012}-a_{2011})$ , ceea ce prin desfacerea parantezelor şi prin telescopare, devine:

$$\sum_{i=1}^{a_{2012}} b_i = 2012\cdot a_{2012} - \sum_{i=1}^{2011} a_i = 2013\cdot a_{2012} - \sum_{i=1}^{2012} a_i \Rightarrow B = 2013\cdot a_{2012} - A \Rightarrow A + B = 2013\cdot a_{2012}$$

Aşadar, $A+B=2013^2$

**b)** Analog explicităm şirul $(c_m)_{m\geq 0}$:

$c_{a_{2012}} = 2012,$

$c_{a_{2012}-1},\ c_{a_{2012}-2}\ ,...,\ c_{a_{2011}} = 2011, ...$

$c_{a_{k+1}-1},\ c_{a_{k+1}-2}\ ,...,\ c_{a_k} = k,\ \forall\ k \geq 1, ...,$

$c_{a_1-1},\ c_{a_1-2}\ ,...,\ c_{a_0} = 0\ .$

$$\sum_{i=1}^{a_{2012}} c_i = 1\cdot(a_2 - a_1) + ... + k\cdot(a_{k+1} - a_k) + ... + 2011\cdot(a_{2012} - a_{2011}) + 1\cdot 2012$$

La fel,

$$\sum_{i=1}^{a_{2012}} c_i = 2011\cdot a_{2012} + 2012 - \sum_{i=1}^{2011} a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{a_{2012}} c_i = 2012\cdot(a_{2012}+1) - \sum_{i=1}^{2012} a_i \Rightarrow C = 2012\cdot(a_{2012}+1) - A \Rightarrow$$

$\Rightarrow A + C = 2012\cdot(a_{2012}+1)$

Cum B=C $\Leftrightarrow$ A+C=A+B, obținem $2013\cdot a_{2012} = 2012\cdot(a_{2012}+1) \Rightarrow\ a_{2012} = 2012$

**Problema 3**

**Soluție.** Vom alege ca bază $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ şi $\overrightarrow{OA_1} = 3\vec{b}$

Din relațiile din ipoteză rezultă că B, C $\in$ (OX şi $B_1$, $C_1$ $\in$ (OY şi $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$ , $\overrightarrow{BC} = 3\vec{a}$ , $\overrightarrow{A_1B_1} = 3\vec{b}$ şi $\overrightarrow{B_1C_1} = 2\vec{b}$. Se arată că există $AA_1 \cap BB_1 = \{M\}$.

Dar $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = 2\vec{a} + x\overrightarrow{BB_1}$ ;

$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} = 3\vec{b} + 3\vec{b} - \vec{a} - 2\vec{a} = 6\vec{b} - 3\vec{a}$ de unde $\overrightarrow{AM} = (2-3x)\vec{a} + 6x\vec{b}$ (1)

Din $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AA_1}$ coliniari rezultă că $\overrightarrow{AM} = y\cdot\overrightarrow{AA_1}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} = 3y\vec{b} - y\vec{a}$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă x=2 şi z=4.

Deci $\overrightarrow{AM} = 12\vec{b} - 4\vec{c}$ (3)

Se arată că $CC_1 \cap AA_1 \neq \Phi$.

Fie $CC_1 \cap AA_1 = \{N\}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ , $(\exists) t \in \mathbb{R}$ a.i. $\overrightarrow{CN} = t\cdot\overrightarrow{CC_1}$

Dar $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC} = 8\vec{b} - 6\vec{a}$ , $\overrightarrow{AN} = \vec{a}(5-6t) + 8t\vec{b}$ (4)

$\overrightarrow{AN}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AA_1}$ , $(\exists)$ $z \in \mathbb{R}$ a.i. $\overrightarrow{AN} = z\cdot\overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{b} - \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = z(3\vec{b} - \vec{a}) = 3z\vec{b} - z\vec{a}$ (4')

Din (4) şi (4') rezultă z=4 şi $\overrightarrow{AN} = 12\vec{b} - 4\vec{c}$ (5)

Din (3) şi (5) rezultă M=N $\Rightarrow$ $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{M\}$