Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIII-a

Galaţi, 25 noiembrie 2012

Clasa a XI-a

SOLUŢII

Problema 1.
Soluţie.

a) Avem $a_n^2 = a_{n-1}^2 + n$, $n \geq 1$.Dând valori şi însumând relațiile obținem uşor $a_n = \sqrt{2012^2 + \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$;

Evident şirul este crescător, iar dacă a_n este un termen rațional atunci a_n va fi natural şi vom avea $a_n = 2012 + k$, $k \in \mathbb{N}^*$. De aici obținem $\sqrt{2012^2 + \frac{n\cdot(n+1)}{2}} = 2012 + k$ adică $n\cdot(n+1) = 2\cdot k\cdot(4024+k)$ de unde se observă soluții $k = 4023 \to n = 8046$ şi $k = 4025 \to n = 8049$

Deci avem $a_{8046} = 6035$ şi $a_{8049} = 6037$.

b) Din ipoteză rezultă că $\det\left(A - \sqrt{2012}\cdot I_2\right)\cdot\det\left(A + \sqrt{2012}\cdot I_2\right) = 0$, de unde rezultă că $2012 \pm \sqrt{2012}\cdot\mathrm{tr}A + \det A = 0$, şi, întrucât $\mathrm{tr}A, \det A \in \mathbb{Q}, \sqrt{2012} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, rezultă că $\mathrm{tr}A = 0, \det A = -2012$, deci, conform ec. C.H. , $A^2 - 2012\cdot I_2 = O_2$, de unde $A^2 = 2012\cdot I_2$, adică $A^{2012} = 2012^{1006}\cdot I_2$.

Problema 2.
Soluţie.

a) Notând $a = |a|\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$, se obține:

$$a - r\cdot\omega^k = \left(|a|\cdot\cos\theta - r\cdot\cos\frac{2\cdot k\cdot\pi}{n}\right) + i\cdot\left(|a|\cdot\sin\theta - r\cdot\sin\frac{2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)$$ şi apoi

$$\left|a - r\cdot\omega^k\right|^2 = |a|^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot|a|\cdot\cos\left(\frac{2\cdot k\cdot\pi}{n} - \theta\right)$$ de unde rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|a - r\cdot\omega^k\right|^2}{|a|^2 + r^2} = n - \frac{2\cdot r\cdot|a|}{|a|^2 + r^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\cdot k\cdot\pi}{n} - \theta\right)$$. În identitatea cunoscută

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(x + k\varphi) = \frac{\sin\frac{n\cdot\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\left(x + \frac{(n+1)\varphi}{2}\right)$$ luăm $x = -\theta$ şi $\varphi = \frac{2\cdot\pi}{n}$ şi obținem :

$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\cdot k\cdot\pi}{n}-\theta\right)=0$, ceea ce arată că suma din enunțul problemei este egală cu n.

b) Se calculează $M^2=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&1\\1&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$, M^3, M^4, etc. şi se intueşte forma generală a puterilor lui M astfel: $M^{2\cdot k}=\begin{pmatrix}F_{2\cdot k}&0&F_{2\cdot k+1}&0\\0&F_{2\cdot k+2}&0&F_{2\cdot k+1}\\F_{2\cdot k+1}&0&F_{2\cdot k+2}&0\\0&F_{2\cdot k+1}&0&F_{2\cdot k}\end{pmatrix}$ şi $M^{2\cdot k+1}=\begin{pmatrix}0&F_{2\cdot k+2}&0&F_{2\cdot k+1}\\F_{2\cdot k+2}&0&F_{2\cdot k+3}&0\\0&F_{2\cdot k+3}&0&F_{2\cdot k+2}\\F_{2\cdot k+1}&0&F_{2\cdot k+2}&0\end{pmatrix}$

unde $(F_n)_{n\geq 0}$ este şirul lui Fibonacci dat de $F_0=0$, $F_1=1$ şi $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $\forall n\geq 2$.
Se demonstrează prin inducție formele găsite , cazurile $k=1$ şi $k=2$ sunt evidente iar pasul inductiv rezultă uşor folosind recurența Fibonacci.

Problema 3
Soluţie.

Avem $U_0=2=1+1=2^{\frac{2^0-(-1)^0}{3}}+2^{-\frac{2^0-(-1)^0}{3}}$

$U_1=\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}=2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}}+2^{-\frac{2^1-(-1)^1}{3}}$

$U_2=\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}=2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}}+2^{-\frac{2^2-(-1)^2}{3}}$

$U_3=\frac{65}{8}=8+\frac{1}{8}=2^{\frac{2^3-(-1)^3}{3}}+2^{-\frac{2^3-(-1)^3}{3}}$; se deduce că $U_n=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ şi se demonstrează prin inducție formula găsită a termenului general, de unde rezultă imediat concluzia problemei