Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Filiala Galaţi**

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri” **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIII-a
Galaţi, 25 noiembrie 2012

Clasa a XII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Din inegalitatea $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e,\ k\in\mathbb{N}^*$, deducem: $k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<1 \Leftrightarrow \ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$ (1)

Scriind inegalitatea (1) pentru $k=1;2;...;n$ şi însumând cele n relaţii obţinem :

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}.$$

Cum şirul $u_n=\ln(n+1)$ are limita $+\infty$ obţinem $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=+\infty$ 3p

b) **Metoda I** – propusă de domnul prof. dr. Cristinel Mortici

Considerăm şirul $b_n=\frac{1}{n-2},\ n\geq 3$.

Avem $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n-2}{n-1}\leq 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2},\ \forall n\geq 1$ (verificarea se efectuează prin calcul direct).....................1p

Cum $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2},\ \forall n\geq 1$ obţinem $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{b_{n+1}}{b_n},\ \forall n\geq 3$.

Dar ştim că $a_n>0,\ \forall n\geq 1$ şi $b_n>0,\ \forall\ n\geq 3$, deci $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\geq\frac{a_n}{b_n},\ \forall n\geq 3$.

Rezultă că şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 3}$ este crescător. 1p

Deci $\frac{a_n}{b_n}\geq\frac{a_3}{b_3},\forall n\geq 3$. Cum $b_n>0,\ \forall n\geq 3$ avem $a_n\geq\frac{a_3}{b_3}b_n,\ \forall n\geq 3$. Acum $\sum\limits_{k=3}^{n}a_k\geq\frac{a_3}{b_3}\sum\limits_{k=3}^{n}b_k$.

Dar $x_n=a_1+a_2+...+a_n$ şi din punctul a) avem că $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=3}^{n}b_k=+\infty$. Astfel obţinem că

şirul $x_n=a_1+a_2+...+a_n$ este divergent..2p

Metoda II

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$, $\forall n \geq 1$

Prin calcul direct se verifică:

$1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-n-1}{n^2} \geq \frac{n-2}{n-1}$, $\forall n \geq 3$

Astfel obținem $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n-2}{n-1}$, $\forall n \geq 3$ 2p

Dându-i lui n valori de la 3 la n-1 și înmulțind inegalitățile obținute, ajungem la:

$\frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_5}{a_4} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdot \frac{n-3}{n-2}, \forall n \geq 3$

Avem

$\frac{a_n}{a_3} \geq \frac{1}{n-2}$, $\forall n \geq 3 \Rightarrow a_n \geq \frac{1}{n-2} \cdot a_3, \forall n \geq 3$ 1p

Dar $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq a_3 + \ldots + a_n \geq a_3 \cdot \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2}$

Din punctul a) avem că $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} = +\infty$. Astfel obținem că șirul $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ este divergent...1p

Problema 2.

Soluție. a) Dacă $A = \{x_1; x_2; \ldots; x_i\}$,atunci $\left\{ \left(x_1^n; x_2^n; \ldots; x_i^n \right) / n \in \mathbb{N}^* \right\} \subseteq \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{de\ i\ ori\ A}$.

Deoarece mulțimea $A \times A \times \ldots \times A$ este finită, rezultă că există $p, q \in \mathbb{N}^*$, p < q astfel încât $\left(x_1^p; x_2^p; \ldots; x_i^p \right) = \left(x_1^q; x_2^q; \ldots; x_i^q \right)$, de unde $x^p = x^q$, $\forall x \in A$. Atunci $A(p) = A(q)$ 3p

b) Prin înmulțiri succesive ale $x^p = x^q$ cu x^{q-p} avem

$x^q = x^{2q-p}$

$x^{2q-p} = x^{3q-2p}$

....

Rezultă că $x^q = x^{(k+1)q-kp}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Alegem $k > \left[\frac{q}{q-p} \right] + 1$, astfel încât $(k+1)q - kp > 2q$, de unde avem $k > \frac{q}{q-p}$ 2p

Notăm cu $r = (k+1)q - kp$ și obținem $r > 2q$ și $x^q = x^r$. Atunci $x^q \cdot x^{r-2q} = x^r \cdot x^{r-2q}$, de unde $x^{r-q} = x^{2(r-q)}$ pentru $\forall x \in A$

Alegem $a = r - q$ și obținem $x^a = x^{2a}, \forall x \in A$. Rezultă $y = y^2$, $\forall y \in A(a)$.

Rezultă că $y = y^2 = y^3 = \ldots = y^n$, adică $y = y^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall y \in A(a)$, așadar $A(a) = A(an)$ 2p

Problema 3.

Soluție. a) Fie F primitiva funcției f. Astfel $F' = f$ şi obținem $(F \cdot g)' = f \cdot g + F \cdot g'$.

Rezultă că $f \cdot g = (F \cdot g)' - F \cdot g'$. Ținând cont că g' continuă, iar F primitiva funcției f avem că $f \cdot g$ admite primitive..2p

b) Pe intervalele $(-\infty, a]$ şi $[b, +\infty)$ funcția g este strict monotonă . Deoarece g este funcție surjectivă şi folosind proprietatea de monotonie deducem că există limitele: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, dintre care una este $-\infty$ şi cealaltă $+\infty$.

Analizăm cazul $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, celălalt se tratează analog.

a este punct de maxim strict, deoarece $g''(a) \neq 0$, iar g este strict crescătoare pe $(-\infty, a)$.

b este punct de minim strict, deoarece $g''(b) \neq 0$, iar g este strict crescătoare pe $(b, +\infty)$..............2p

Considerăm $m < \lambda < M$, $M = g(a)$, $m = g(b)$. Atunci $\exists\, u \in (-\infty, a)$ şi $v \in (b, +\infty)$ astfel încât $g(u) = g(v) = \lambda$.

Notăm $I = (-\infty, u]$ şi $J = [v, +\infty)$, $I_1 = (-\infty, \lambda]$, $J_1 = [\lambda, +\infty)$.

Notăm $f_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, f_1 restricție a funcției f la I_1 şi $g_1 : I \to I_1$ restricție a funcției g la I.

g_1 este funcție bijectivă, derivabilă şi cu $g_1'(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Conform punctului a) funcția $f_1 \circ g_1 \cdot g_1'$ admite o primitivă F.

Avem:

$$\left(F \circ g_1^{-1}\right)'(t) = \left(F' \circ g_1^{-1}\right)(t) \cdot \left(g_1^{-1}\right)'(t) =$$

$$= \left(f \circ g \circ g_1^{-1}\right)(t) \cdot g_1'\left(g_1^{-1}(t)\right) \cdot \left(g_1^{-1}\right)'(t) = f(t)$$

deoarece

$$g_1'\left(g_1^{-1}(t)\right) \cdot \left(g_1^{-1}\right)'(t) = \left(g_1' \circ g_1^{-1}\right) \cdot \left(g^{-1}\right)'(t) =$$

$$= \left(g_1 \circ g_1^{-1}\right)'(t) = t' = 1, \ \forall\, t \in I_1 = (-\infty, \lambda]$$

....2p

Deci f are primitive pe $(-\infty, \lambda]$. Asemănător se arată că f are primitive pe $[\lambda, +\infty)$.

Considerăm funcția F_1 primitiva funcției f pe $(-\infty, \lambda]$ şi funcția F_2 primitiva funcției f pe $[\lambda, +\infty)$.

Determinăm funcția G primitivă a funcției f:

$$G(x) = \begin{cases} F_1(x), \ x \leq \lambda \\ F_2(x) + c, x > \lambda \end{cases}, \quad c = F_1(\lambda) - F_2(\lambda)$$

Verificăm derivabilitatea funcției G în punctul $x_0 = \lambda$.

În concluzie, f admite primitive...1p