Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude" , ediţia a XIII-a
Galaţi, 24 noiembrie 2012

Clasa a VII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Dacă M este mijlocul laturii (BC) rezultă că (EF) este linie mijlocie în triunghiul ABM, deci $EF \parallel AM$. Din congruenţa triunghiurilor dreptunghice ABM, respectiv DAE (C.C) rezultă $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle EDA) = 90^0 - m(\sphericalangle AED)$, de unde rezultă $DE \perp AM$, şi deci $DE \perp EF$.

b). Fie $\{G\} = AD \cap EF$. Din congruenţa triunghiurilor dreptunghice BEF, respectiv AEG rezultă că $(EF) \equiv (EG)$, aşadar (DE) este mediană, respectiv înălţime în triunghiul DGF, deci triunghiul DGF este isoscel, adică $(DE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADF$, de unde rezultă concluzia.

Problema 2.

Soluţie. a) Presupunem prin reducere la absurd că toţi termenii şirului de rapoarte egale sunt numere naturale. Din $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} = ... = \frac{a_{2011}}{a_{2012}} = k \in \mathbb{N}$, rezultă că $a_1 = k \cdot a_2, a_3 = k \cdot a_4, ..., a_{2011} = k \cdot a_{2012}$.

Produsul termenilor este $a_1 \cdot a_2 \cdot ....a_{2012} = k^{1006} \cdot (a_2 \cdot a_4 \cdot ....a_{2012})^2$, număr natural pătrat perfect.

Dacă produsul termenilor este un număr pătrat perfect cu ultimele patru cifre nenule identice, acestea ar putea fi $1111, 4444, 5555, 6666, 9999$.

Dar un număr care are $u2c(11) = M_4 + 3$ nu este pătrat perfect.

$u2c(55) = M_4 + 3$ deci nu este pătrat perfect.

$u2c(66) = M_4 + 2$ deci nu este patrat perfect.

$u2c(99) = M_4 + 3$ deci nu este patrat perfect.

Dacă numărul este de forma $\overline{A4444}$ atunci $\overline{A4444} = A \cdot 10^4 + 4444 = 2^2 \cdot \left(A \cdot 5^4 \cdot 2^2 + 1111\right)$ ar fi pătrat perfect, deci ar trebui ca numărul $A \cdot 5^4 \cdot 2^2 + 1111 = M_4 + 3$ să fie pătrat perfect, contradicţie. Deci presupunerea facută este falsă. Înseamnă că nu toţi termenii şirului sunt numere naturale.

b) Din $x_2 = x_1 \cdot x_3 - 1$ rezultă că $x_3 = \frac{1 + x_2}{x_1}$. Analog, $x_4 = \frac{1 + x_3}{x_2} = \frac{1 + \frac{1 + x_2}{x_1}}{x_2} = \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$,

$$x_5 = \frac{1 + x_4}{x_3} = \frac{1 + \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}}{\frac{1 + x_2}{x_1}} = \frac{x_1 \cdot x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \cdot \frac{x_1}{1 + x_2} = \frac{(1 + x_1) \cdot (1 + x_2)}{x_2} \cdot \frac{1}{1 + x_2} = \frac{1 + x_1}{x_2}$$, iar

$$x_6=\frac{1+x_5}{x_4}=\frac{1+\frac{1+x_1}{x_2}}{\frac{1+x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}}=x_1,\ x_7=\frac{1+x_6}{x_5}=\frac{1+x_1}{\frac{1+x_1}{x_2}}=x_2,\ x_8=\frac{1+x_7}{x_6}=\frac{1+x_2}{x_1}=x_3,\ x_9=\frac{1+x_8}{x_7}=\frac{1+x_3}{x_2}=x_4\ ...,$$

deci termenii şirului se repetă în mod periodic, adică $x_1=x_6=x_{11}=x_{16}=...=x_{5\cdot k+1}$, $x_2=x_7=x_{12}=x_{17}=...=x_{5\cdot k+2}$, $x_3=x_8=...=x_{5\cdot k+3}$, $x_4=x_9=x_{14}=...=x_{5\cdot k+4}$, $k\in\mathbb{N}$, $x_5=x_{10}=...=x_{5\cdot k}$, $k\in\mathbb{N}^*$ iar întrucât $2012=5\cdot k+2,\ k=402$, rezultă că $x_{2012}=x_2=2013$

Problema 3.

Soluție. a) $2012=2^2\cdot 503$, deci $2012^7=2^{14}\cdot 503^7$ şi are $(14+1)\cdot(7+1)=120$ divizori. Fie $n=2012^7$ şi $d_1=1<d_2<d_3<...<d_k=n$, divizorii numărului n în ordine crescătoare, $k=120$. Atunci $\frac{n}{d_1}=n>\frac{n}{d_2}>\frac{n}{d_3}>...>\frac{n}{d_k}=1$ reprezintă exact aceiaşi divizori scrişi în ordine descrescătoare, deci

$d_1\cdot d_k=n,\ d_2\cdot d_{k-1}=n,\ ...,d_k\cdot d_1=n$, adică $d_{13}\cdot d_{108}=n,$ de unde rezultă că $d_{108}=\frac{n}{d_{13}}$, unde

$1<2<2^2<2^3<2^4<2^5<2^6<2^7<2^8<503<2^9<2\cdot 503<2^{10}$, deci

$d_{13}=2^{10}$. Rezultă că $d_{108}=\frac{2^{14}\cdot 503^7}{2^{10}}=2^4\cdot 503^7>16\cdot 500^7=2^4\cdot\left(2^2\cdot 5^3\right)^7=2^{18}\cdot 5^{21}=125\cdot 10^{18}$, deci

d_{108} are cel puțin 21 cifre.

b) 30 conține factorii primi $2,3,5$, deci $n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$, unde $a,b,c\in\mathbb{N}$. Fie $d_1=1<d_2<d_3<...<d_k=n$, divizorii numărului n ordonați crescător, unde $k=(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$. La fel ca la punctual a) , rezultă $d_1\cdot d_k=n,\ d_2\cdot d_{k-1}=n,\ ...,d_k\cdot d_1=n$, de unde, prin înmulțirea celor k egalități rezultă $(d_1\cdot d_2\cdot...\cdot d_k)^2=n^k$, adică $30^{13310}=n^k$, deci $2^{13310}\cdot 3^{13310}\cdot 5^{13310}=2^{a\cdot k}\cdot 3^{b\cdot k}\cdot 5^{c\cdot k}$, de unde $a\cdot k=13310$, $b\cdot k=13310$, $c\cdot k=13310$, deci $a=b=c$ şi $k=(a+1)^3$. Rezultă $a\cdot(a+1)^3=13310=10\cdot 11^3$, de unde $a=10$, adică $n=30^{10}$.