Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIII-a
Galaţi, 24 noiembrie 2012

Clasa a VIII-a

SOLUŢII

Problema 1.
Soluţie a) Aşa cum e dat în enunţul problemei, dacă Andrei introduce perechea $(2;5)$, atunci pe display va apărea ori perechea $(3;11)$, ori perechea $(5;16)$. Mai departe, la pasul al doilea, din perechea $(3;11)$ putem obţine ori perechea $(5;23)$, ori perechea $(8;34)$, iar din perechea $(5;16)$ putem obţine ori perechea $(9;33)$, ori perechea $(14;49)$. Aplicând perechilor $(5;23)$, $(8;34)$, $(9;33)$, $(14;49)$ procedeul de generare a perechilor obţinem $M=\{(9;47),(14;70),(15;69),(23;103),(17;67),(26;100),(27;99),(41;148)\}$.

b) Observam că în cazul $(2\cdot a-1;2\cdot b+1)$ suma componentelor perechii este $2\cdot(a+b)$, iar cazul $(3\cdot a-1;3\cdot b+1)$ suma componentelor este $3\cdot(a+b)$. Deci, $a+b$ divide suma componentelor oricărei perechi. Pentru perechea $(2011;5671)$ avem 2011+5671= 7682, iar 7682 nu se divide cu 7=2+5, de unde rezultă că dacă Andrei introduce în computer perechea $(2;5)$, atunci după un număr finit de paşi nu poate obţine perechea $(2011;5671)$.

Pentru cea de-a doua pereche avem că $2011+3029 = 5040 = 2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$, deci în acest caz nu putem folosi argumentul de la perechea anterioară.

Se observă că dacă Andrei se joacă cu o pereche $(a;b)$, atunci după n paşi obţine o pereche $(\alpha;\beta)$ cu proprietatea $\alpha+\beta=2^x\cdot3^y\cdot(a+b)$ şi $x+y=n$.

Prin urmare, dacă Andrei introduce în computer perechea $(2;5)$, atunci după un număr finit de paşi nu poate obţine perechea $(2011;3029)$, deoarece suma $2011+3029=5040$ trebuie să fie de forma $2^x\cdot3^y\cdot(a+b)=2^x\cdot3^y\cdot7$, iar $2011+3029 = 5040 = 2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$ (conţine în descompunere factorul 5, ceea ce nu e cazul).

c) Mai sus am observat că dacă Andrei se joacă cu o pereche $(a;b)$, atunci după n paşi obţine o pereche $(\alpha;\beta)$ cu proprietatea $\alpha+\beta=2^x\cdot3^y\cdot(a+b)$ şi $x+y=n$.

În cazul nostru $a=2$, $b=5$, $\alpha=1665$ şi $\beta=6399$, de unde obţinem ecuaţia: $1665+6399=2^x\cdot3^y\cdot(2+5)\Leftrightarrow1152=2^x\cdot3^y\Leftrightarrow2^7\cdot3^2=2^x\cdot3^y\Leftrightarrow x=7$ şi $y=2$ (din teorema fundamentală a aritmeticii avem că descompunerea în factori primi este unică) , deci $n=x+y=9$.

Problema 2.

Soluţie. a) Aplicăm reciproca teoremei lui Ceva în triunghiul ΔBCD. Obţinem . $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{ND}\cdot\frac{PD}{PB}=$ $=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=1$, de unde rezultă că dreptele BN, CP şi DM sunt concurente.

b) Pentru a calcula raportul $\frac{OB}{ON}$, aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ΔBND şi pentru punctele coliniare C, O şi P. Rezultă că $\frac{PB}{PD}\cdot\frac{CD}{CN}\cdot\frac{ON}{OB}=1\Leftrightarrow\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{ON}{OB}=1\Leftrightarrow\frac{ON}{OB}=1$. Mai departe, dreptele AO şi BS sunt coplanare, deoarece sunt incluse în planul (ABN). Notăm cu $G_1\in(AO)$ punctul lor de intersecţie. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ΔAON şi B,G_1,S coliniare obţinem $\frac{G_1A}{G_1O}\cdot\frac{BO}{BN}\cdot\frac{SN}{SA}=1\Leftrightarrow\frac{G_1A}{G_1O}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=1\Leftrightarrow\frac{G_1A}{G_1O}=3$.

Pentru a calcula raportul $\frac{OC}{OP}$, aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ΔBCP şi pentru punctele coliniare M, O şi D. Rezultă că $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{OC}{OP}\cdot\frac{DP}{DB}=1\Leftrightarrow\frac{1}{3}\cdot\frac{OC}{OP}\cdot\frac{3}{5}=1\Leftrightarrow\frac{OP}{OC}=\frac{1}{5}$. Mai departe, dreptele AO şi CT sunt coplanare, deoarece sunt incluse în planul (ACP). Notăm cu $G_2\in(AO)$ punctul lor de intersecţie. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ΔAOP şi C,G_2,T coliniare obţinem $\frac{G_2A}{G_2O}\cdot\frac{CO}{CP}\cdot\frac{TP}{TA}=1\Leftrightarrow\frac{G_2A}{G_2O}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}=1\Leftrightarrow\frac{G_2A}{G_2O}=3$.

Pentru a calcula raportul $\frac{OD}{OM}$, aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ΔBDM şi pentru punctele coliniare C, O şi P. Rezultă că $\frac{PB}{PD}\cdot\frac{OD}{OM}\cdot\frac{CM}{CB}=1\Leftrightarrow\frac{2}{3}\cdot\frac{OD}{OM}\cdot\frac{3}{4}=1\Leftrightarrow\frac{OD}{OM}=\frac{2}{1}$. Mai departe, dreptele AO şi DR sunt coplanare, deoarece sunt incluse în planul (ADM). Notăm cu $G_3\in(AO)$ punctul lor de intersecţie. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ΔAOM şi D,G_3,R coliniare obţinem $\frac{G_3A}{G_3O}\cdot\frac{DO}{DM}\cdot\frac{RM}{RA}=1\Leftrightarrow\frac{G_3A}{G_3O}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\frac{G_3A}{G_3O}=3$.

Am obţinut că $G_1,G_2,G_3\in(AO)$ şi $\frac{G_1A}{G_1O}=\frac{G_2A}{G_2O}=\frac{G_3A}{G_3O}=3$, de unde rezultă că $G_1=G_2=G_3$ şi, prin urmare, dreptele AO, BS, CT şi DR sunt concurente.

Problema 3

Soluţie. a) Fie $\frac{3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{x}}{\sqrt{3}+\sqrt{x}}=k\in\mathbb{Z}$. Rezultă că $3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{x}=k\cdot\sqrt{3}+k\cdot\sqrt{x}$, de unde $\sqrt{3}\cdot(3-k)=\sqrt{x}\cdot(k+1)$, ceea este echivalent cu $\sqrt{\frac{x}{3}}=\frac{3-k}{k+1}=\frac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{N}$, $b\neq 0$, $(a,b)=1$. Deducem că $x=\frac{3\cdot a^2}{b^2}\in\mathbb{N}$, de unde, ţinând cont că $(b^2,a^2)=1$, rezultă că $b^2\mid 3$, deci $b=1$. Prin urmare, $\sqrt{\frac{x}{3}}=\frac{3-k}{k+1}=a\in\mathbb{N}$, de unde $x=3\cdot a^2$ şi $k+1\mid 3-k$. Din relaţiile $k+1\mid 3-k$ şi $k+1\mid k+1$ obţinem $k+1\mid 3-k+k+1\Leftrightarrow k+1\mid 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k+1 \in \{1;-1;\ 2;-2;\ 4;-4\} \Leftrightarrow k \in \{0;-2;\ 1;-3;\ 3;-5\}$, de unde rezultă că $a=\frac{3-k}{k+1} \in \{3;\ 1;\ 0\}$. Din relaţia $x=3\cdot a^2$ obţinem că $x \in \{0;3;\ 27\}$.

b) Cum $x>0$, vom avea $y>1$, deci $y \ge 2$. Din relaţia $x^n+1=y^{n+1}$ avem că $x^n=(y-1)\cdot m$, unde $m=y^n+y^{n-1}+...+y+1$. Obţinem $m \mid x^n$, deci $(m,n+1)=1$. Mai departe, presupunem că $n \ge 2$. Numărul natural $m=y^n+y^{n-1}+...+y+1$ se poate scrie sub forma:
$m=y^n-y^{n-1}+2\cdot y^{n-1}-2\cdot y^{n-2}+3\cdot y^{n-2}-3\cdot y^{n-3}+...+(n-1)\cdot y^2-(n-1)\cdot y+n\cdot y-n+n+1$, de unde obţinem că $m=(y-1)\cdot\left(y^{n-1}+2\cdot y^{n-2}+3\cdot y^{n-3}+...+(n-1)\cdot y+n\right)+n+1$. Din ultima relaţie deducem că cel mai mare divizor al numerelor m şi $y-1$ divide $n+1$ şi, deoarece $(m,n+1)=1$, obţinem $(m,y-1)=1$. Din relaţiile $x^n=(y-1)\cdot m$ şi $(m,y-1)=1$ obţinem că m este de forma r^n, unde r este număr natural nenul. Evident $m>y^n$. Demonstrăm că $m<(y+1)^n \Leftrightarrow \frac{y^{n+1}-1}{y-1}<(y+1)^n$. Mai întâi demonstrăm că $\frac{y^{n+1}}{y-1}<(y+1)^n \Leftrightarrow \frac{y}{y-1}<\left(1+\frac{1}{y}\right)^n$, dar $\left(1+\frac{1}{y}\right)^n \ge \left(1+\frac{1}{y}\right)^2=1+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}>\frac{y}{y-1}$, deoarece inegalitatea $1+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}>\frac{y}{y-1}$ este echivalentă cu $y^2-y-1>0$, care este adevărată pentru orice $y \ge 2$, din cauză că $y^2 \ge 2\cdot y>y+1$, pentru orice $y \ge 2$. Prin urmare, $\frac{y^{n+1}-1}{y-1}<\frac{y^{n+1}}{y-1}<(y+1)^n$, deci $y^n<r^n<(y+1)^n$, adică $y<r<y+1$, ceea ce reprezintă o contradicţie. Presupunerea făcută este falsă, deci $n=1$. Obţinem că $(x,2)=1$, deci x este număr impar şi $x+1=y^2$. Prin urmare, tripletele cerute sunt $\left(a^2-1;\ a;\ 1\right)$, unde a este un număr natural nenul par ales arbirar.