Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România **Colegiul Național „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galați **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați**

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediția a XIII-a
Galați, 24 noiembrie 2012

Clasa a IX-a

SOLUȚII

Problema 1.

Soluție. Condiția dată arată că există $x\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{\sqrt{p}+\sqrt{a}}{\sqrt{q}+\sqrt{b}}=x$, pe care o scriem în forma $\sqrt{p}-x\cdot\sqrt{q}=x\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a}$.Prin ridicare la pătrat obținem $p+x^2\cdot q-2\cdot x\cdot\sqrt{p\cdot q}-x^2\cdot b-a=-2\cdot x\cdot\sqrt{a\cdot b}$. Notăm $p+x^2\cdot q-x^2\cdot b-a=y$ şi ridicăm din nou la pătrat.Relația devine : $y^2+4\cdot x^2\cdot p\cdot q-4\cdot x\cdot y\cdot\sqrt{p\cdot q}=4\cdot x^2\cdot a\cdot b$

Dacă $y\neq 0$ atunci $\sqrt{p\cdot q}\in\mathbb{Q}$,fals.

Dacă $y=0$ atunci determinăm perechea (a,b) din condițiile: $a\cdot b=p\cdot q$ şi $x\in\mathbb{Q}$.

Pentru că $p/a\cdot b$ şi p este număr prim rezultă că p divide pe a sau p divide pe b

Dacă p divide pe a avem $a=p$ şi $b=q$ dar $x=\sqrt{\frac{p}{q}}\notin\mathbb{Q}$ sau $a=p\cdot q$ şi $b=1$ dar $x\notin\mathbb{Q}$

Dacă p divide pe b obținem $b=p$ şi $a=q$,iar $x=1\in\mathbb{Q}$ sau $b=p\cdot q$ şi $a=1$ dar $x\notin\mathbb{Q}$

În concluzie $M=\{(q,p)\}$.

Problema 2.

Soluție. a) Notăm $\frac{MB}{MA}=x$, $\frac{NC}{NA}=y$ şi obținem $\overrightarrow{FM}=\frac{1}{x+1}\cdot\overrightarrow{FB}+\frac{x}{x+1}\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FN}=\frac{1}{y+1}\cdot\overrightarrow{FC}+\frac{y}{y+1}\cdot\overrightarrow{FA}$

Căutăm $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{FA}=\alpha\cdot\overrightarrow{FB}+\beta\cdot\overrightarrow{FC}$. Atunci descompunerea vectorilor $\overrightarrow{FM}$ şi $\overrightarrow{FN}$ în baza formată din vectorii $\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FC}\right)$ este dată de relațiile: $\overrightarrow{FM}=\frac{1+\alpha\cdot x}{x+1}\cdot\overrightarrow{FB}+\frac{\beta\cdot x}{x+1}\overrightarrow{FC}$,

$\overrightarrow{FN}=\frac{\alpha\cdot y}{y+1}\cdot\overrightarrow{FB}+\frac{1+\beta\cdot y}{y+1}\cdot\overrightarrow{FC}$.Din condiția de coliniaritate a vectorilor $\overrightarrow{FM}$ şi $\overrightarrow{FN}$ se determină $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.Într-adevăr, coordonatele celor doi vectori în baza $\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FC}\right)$ sunt proporționale: $\frac{1+\alpha\cdot x}{\alpha\cdot y}=\frac{\beta\cdot x}{1+\beta\cdot y}$ sau $\alpha\cdot x+\beta\cdot y=-1$.Din ipoteză are loc şi relația $b^2\cdot x+c^2\cdot y=a^2$.

Urmează că sistemul are soluții orice pereche (x,y) cu $x,y\in(0,1)$ echivalent cu $\alpha=-\frac{b^2}{a^2}$, $\beta=-\frac{c^2}{a^2}$

Deci, punctul F este caracterizat prin relația $a^2\cdot\overrightarrow{FA}+b^2\cdot\overrightarrow{FB}+c^2\cdot\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ sau folosind regula lui Chasles prin vectorul de poziție $\overrightarrow{AF}=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\cdot\overrightarrow{AC}$ care arată că F este fix.

b)Dacă $AD\perp BC, D\in(BC)$ atunci $BD=\frac{c^2}{a}$ şi $DC=\frac{b^2}{a}$.Atunci $\frac{BD}{DC}=\frac{c^2}{b^2}$ şi $\overrightarrow{AD}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c^2}{a^2}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Conform punctului a) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2 \cdot a^2} \cdot \left(b^2 \cdot \overrightarrow{AB} + c^2 \cdot \overrightarrow{AC} \right)$ şi avem $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$.

c)Din caracterizarea punctului fix F obținem $\overrightarrow{AF} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \overrightarrow{FB} + \frac{c^2}{a^2} \cdot \overrightarrow{FC}$ .Construim $D \in (BC), \frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}$

şi rezultă că $\overrightarrow{FD} = \frac{b^2}{b^2 + c^2} \cdot \overrightarrow{FB} + \frac{c^2}{b^2 + c^2} \cdot \overrightarrow{FC}$ .Deci punctele A,F,D sunt coliniare. Construim $P \in (BC)$

astfel încât $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle BAD$ .Din relația lui Steiner obținem că $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BP}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$,deci $BP = PC$.

Dacă MBCN inscriptibil atunci $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$ şi cum $\sphericalangle MAF \equiv \sphericalangle CAP$ rezultă că $\triangle AMF \sim \triangle ACP$

Din şirul de rapoarte egale $\frac{MF}{PC} = \frac{AM}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{MN}{2 \cdot PC}$ obținem $MF = \frac{MN}{2}$.

Reciproc,dacă F este mijlocul segmentului (MN) atunci $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \right) = \frac{AM}{c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{AN}{b} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Din unicitatea descompunerii vectorului $\overrightarrow{AF}$ obținem $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ .Adăugăm $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle CAB$ şi rezultă că $\triangle AMN \sim \triangle ACB$,deci MBCN inscriptibil.

Problema 3

Soluție. **a**)Determinăm ordinea $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ pentru care suma $S(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ este maximă.Dacă schimbăm între ei indicii de pe pozițiile p şi q, $1 \le p < q \le n$ vom obține o sumă mai mică decât cea maximă:

$$a_1 \cdot b_{i_1} + a_2 \cdot b_{i_2} + \ldots + a_p \cdot b_{i_q} + \ldots + a_q \cdot b_{i_p} + \ldots + a_n \cdot b_{i_n} < a_1 \cdot b_{i_1} + a_2 \cdot b_{i_2} + \ldots + a_p \cdot b_{i_p} + \ldots + a_q \cdot b_{i_q} + \ldots + a_n \cdot b_{i_n}$$

După reduceri obținem $(a_p - a_q) \cdot \left(b_{i_q} - b_{i_p} \right) < 0$ din care rezultă $b_{i_q} > b_{i_p}$ pentru orice p,q cu $1 \le p < q \le n$.În concluzie,permmutarea $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ defineşte suma maximă dacă pentru orice $1 \le p < q \le n$ rezultă $i_p < i_q$,care arată că $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ este ordonată crescător, $(i_1, i_2, \ldots i_n) = (1, 2, \ldots n)$

Suma maximă este $S(1, 2, \ldots n) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots a_n \cdot b_n$

Pentru a determina ordinea indicilor $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ pentru care se realizează suma minimă procedăm la fel şi obținem $(a_p - a_q) \cdot \left(b_{i_q} - b_{i_p} \right) > 0$, adică $i_p > i_q$ pentru orice $1 \le p < q \le n$,ceea ce arată că permutarea este ordonată descrescător şi suma minimă este $S(n, n-1, \ldots 1) = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_1$.

b)Pentru că expresiile sunt simetrice în a,b,c putem considera $0 < a \le b \le c$ din care rezultă $\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{a+c} \le \frac{1}{a+b}$ şi $a^n \le b^n \le c^n$ .Conform punctului a) suma $\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b}$ este maximă şi rezultă

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \ge \frac{a^n}{a+b} + \frac{b^n}{b+c} + \frac{c^n}{a+c}$$

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \ge \frac{a^n}{a+c} + \frac{b^n}{a+b} + \frac{c^n}{c+b}$$

Prin adunare rezultă că $2 \cdot \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \right) \ge \frac{a^n + b^n}{a+b} + \frac{b^n + c^n}{b+c} + \frac{c^n + a^n}{c+a}$

Dar $a^n + b^n \ge \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot \left(a^{n-1} + b^{n-1} \right) \Leftrightarrow (a-b) \cdot \left(a^{n-1} - b^{n-1} \right) \ge 0$.

Scriind şi inegalitățile analoage urmează că $\frac{a^n + b^n}{a+b} + \frac{b^n + c^n}{b+c} + \frac{c^n + a^n}{c+a} \ge a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$,ceea ce termină demonstrația.