MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL I

a) Arătaţi că $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$, oricare ar fi k număr natural nenul.

b) Fie $p=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 100}$. Aflaţi zecimea din scrierea zecimală a numărului p.

c) Arătaţi că $\frac{1}{2\sqrt{2013}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot ...\cdot\frac{4025}{4026}<\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4026}}$.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) Deoarece $2k>0$ *şi* $2k+1>0$, $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}\Leftrightarrow(2k-1)(2k+1)<2k\cdot 2k\Leftrightarrow$ ……….1 punct

$\Leftrightarrow 4k^2-1<4k^2$, ceea ce este evident adevărat. ……….1 punct

b) Conform subpunctului **a)**, putem scrie succesiv:

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3};\frac{3}{4}<\frac{4}{5};\frac{5}{6}<\frac{6}{7};...;\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$.

Înmulţind inegalităţile, membru cu membru, obţinem:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot ...\cdot\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot ...\cdot\frac{100}{101}$ ……….1 punct

$p<\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{101}\Leftrightarrow p^2<\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$ şi cum $p>0\Rightarrow p<\frac{1}{10}\Leftrightarrow p<0{,}1$

Zecimea din scrierea zecimală a numărului p este 0. ……….1 punct

c) Fie $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot ...\cdot\frac{4025}{4026}$ şi $b=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot ...\cdot\frac{4024}{4025}$. Se arată că $a>b$. ....1 punct

Din $a>b\Rightarrow a^2>ab\Leftrightarrow a^2>\frac{1}{4\cdot 2013}\Rightarrow a>\frac{1}{2\sqrt{2013}}$ ....1 punct

Fie $c=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot ...\cdot\frac{4024}{4025}$

Obţinem $a<c\Rightarrow a^2<ac\Leftrightarrow a^2<\frac{3}{8\cdot 2013}\Rightarrow a<\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4026}}$. ....1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.