OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătaţi că:

$$\left(x+y+z\right)^2+\left(x+y-z\right)^2+\left(x-y+z\right)^2+\left(-x+y+z\right)^2=4x^2+4y^2+4z^2$$

b) Demonstraţi că numărul $4024^2+4026^2+4028^2$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale pătrate perfecte.

c) Dacă $a=2^{2013}, b=3^{2013}$ *şi* $c=6^{-2013}$, atunci arătaţi că:

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1.$$

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$ şi

$\left(x+y-z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2xz$ ……….1 punct

Finalizare ....1 punct

b) $4024^2+4026^2+4028^2=4\left(2012^2+2013^2+2014^2\right)$ ……….1 punct

Conform subpunctului **a)**

$$4\left(2012^2+2013^2+2014^2\right)=\left(2012+2013+2014\right)^2+\left(2012+2013-2014\right)^2+$$
$$+\left(2012-2013+2014\right)^2+\left(-2012+2013+2014\right)^2=6039^2+2011^2+2013^2+2015^2.$$
……….1 punct

c) $abc=2^{2013}\cdot 3^{2013}\cdot 6^{-2013}=1$ ……….1 punct

Amplifică prima fracţie cu c şi obţine

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}$$
……….1 punct

Amplifică a doua fracţie cu ac şi obţine

$$\frac{c}{1+ac+c}+\frac{ac}{c+abc+ac}+\frac{1}{ca+c+1}=\frac{ca+c+1}{ca+c+1}=1$$
……….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.