OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL al II-lea

a) Să se demonstreze că $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ şi $\forall a,b \in \mathbb{R}_+$.

c) Arătaţi că $\dfrac{x^3}{y^2(x+2z)}+\dfrac{y^3}{z^2(y+2x)}+\dfrac{z^3}{x^2(z+2y)} \geq 1, \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+$.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca \Leftrightarrow$ ……….1 punct

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $a=b=c$. ……….1 punct

b) $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow b(a+b)x^2+a(a+b)y^2 \geq ab(x+y)^2 \Leftrightarrow$ ……….1 punct

$\Leftrightarrow (bx-ay)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $bx=ay$. ……….1 punct

c) Conform subpunctului **b),** avem: $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}+\dfrac{z^2}{c}$

Tot, conform subpunctului **b)**: $\dfrac{(x+y)^2}{a+b}+\dfrac{z^2}{c} \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ ……….1 punct

Am obţinut astfel inegalitatea: $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c} \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c} \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ şi $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$

şi aplicând-o, obţinem:

$$\frac{x^3}{y^2(x+2z)}+\frac{y^3}{z^2(y+2x)}+\frac{z^3}{x^2(z+2y)}=\frac{x^4}{xy^2(x+2z)}+\frac{y^4}{yz^2(y+2x)}+\frac{z^4}{zx^2(z+2y)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(xy+yz+zx)^2}$$ ..1 punct

Conform rezultatului enunţat la subpunctul **a),** $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+xz+yz} \geq 1, \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+$ şi finalizăm:

$$\frac{x^3}{y^2(x+2z)}+\frac{y^3}{z^2(y+2x)}+\frac{z^3}{x^2(z+2y)} \geq \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+xz+yz}\right)^2 \geq 1, \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+.$$ ……….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.