OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

**SUBIECTUL al III-lea**

Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$ şi punctele $E, F, M, N, P, R$ mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$,$[CD]$, $[DA]$,$[AC]$, respectiv,$[BD]$. Demonstraţi că:

a) Patrulaterul $MNEF$ este paralelogram.

b) Dreptele $ME, NF, PR$ sunt concurente.

c) $ON + OF = \frac{AD+BC}{2} \Leftrightarrow OE + OM = \frac{AB+CD}{2}$.

**BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE**

a) $[MN]$ este linie mijlocie în $\triangle ACD \Rightarrow MN \parallel AC$ *şi* $MN = \frac{1}{2}AC$ ..........1 punct

Patrulaterul $MNEF$ este paralelogram. ..........1 punct

b) $MNEF$ este paralelogram $\Rightarrow \exists\, O$ *a.î.* $ME \cap NF = \{O\}$, cu $O$ mijlocul segmentului $[NF]$ ....1 punct

$FRNP$ este paralelogram $\Rightarrow PR$ trece prin $O$, mijlocul segentului $[NF]$ ....1 punct

c) "$\Rightarrow$"

1) Dacă $m(\sphericalangle AOD) < 90^0$. Fie $T \in (NO$ a.î. $NT = NA$;

Din $\left.\begin{array}{l} [TN] \text{ este mediană în } \triangle ATD \\ TN = \frac{1}{2}AD \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ATD$ este dreptunghic în $T$

$m(\sphericalangle ATD) = 90^\circ = m(\sphericalangle ATN) + m(\sphericalangle DTN) > m(\sphericalangle AOT) + m(\sphericalangle DOT) = m(\sphericalangle AOD) \Rightarrow T \in (ON)$

Analog, fie $Q \in (FO$ a.î. $OF = FB$; Obţinem $Q \in (OF)$ *şi* $m(\sphericalangle BQC) = 90^\circ$;

Atunci $ON + OF > TN + QF = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD+BC}{2}$, ceea ce reprezintă o contracţie. ..........1 punct

2) Dacă $m(\sphericalangle AOD) > 90^0$., ajungem la aceeaşi contradicţie.

**Deci** $m(\sphericalangle AOD) = 90^0 \Rightarrow \triangle DOC$ *şi* $\triangle AOB$ sunt dreptunghice cu $[OM]$, respectiv $[OE]$ mediane.

Atunci $OM + OE = \frac{1}{2}DC + \frac{1}{2}AB = \frac{AB+CD}{2}$. ..........1 punct

"$\Leftarrow$"

Se tratează analog ..........1 punct

**Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.**