OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL al III-lea

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA. Distanţele AM, AB şi AD sunt direct proporţionale cu numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, respectiv $\sqrt{6}$, iar distanţa de la punctul M la dreapta BD este egală cu $8\,cm$.

a) Aflaţi măsura unghiului dintre planele (MBD) şi (ABC).

b) Demonstraţi că dreapta BD şi $(MAD)\cap(MBC)$ sunt drepte necoplanare.

c) Aflaţi distanţa de la punctul C la planul (MBD).

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $\dfrac{MA}{\sqrt{2}}=\dfrac{AB}{\sqrt{3}}=\dfrac{AD}{\sqrt{6}}=k$, unde $k\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow MA=k\sqrt{2}; AB=k\sqrt{3}; AD=k\sqrt{6};$

Fie $AE\perp BD$, cu $E\in BD$. Din $MA\perp(ABC), AE\perp BD, AE, BD\subset(ABC)\Rightarrow ME\perp BD$ ……….1 punct

$$\left.\begin{array}{l}(MBD)\cap(ABC)=BD\\ ME\perp BD \text{ şi } ME\subset(MBD)\\ AE\perp BD \text{ şi } AE\subset(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow \sphericalangle[(MBD),(ABC)]=\sphericalangle(ME,AE)=\sphericalangle MEA.$$
……….1 punct

$$\left.\begin{array}{l}\triangle MAE \text{ e dr. în } A\\ ME=AE=k\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow m(\sphericalangle MEA)=45^\circ.$$
……….1 punct

b) $M\in(MBC)\cap(MAD)\Rightarrow \exists\, g$, a.î. $(MBC)\cap(MAD)=g$, cu condiţia $M\in g$;

$AD\parallel BC,\ AD\subset(MAD),\ BC\subset(MBC),\ (MBC)\cap(MAD)=g\Rightarrow g\parallel AD\parallel BC$ ……….1 punct

$g\parallel AD,\ AD\subset(ABC),\ g\not\subset(ABC)\Rightarrow g\parallel(ABC)\Rightarrow g\cap(ABC)=\varnothing\Rightarrow g\cap BD=\varnothing\Rightarrow$

$\Rightarrow g\parallel BD$ sau g şi BD sunt drepte necoplanare ; Dar $D\notin g,\ AD\parallel g\Rightarrow BD\nparallel g$.

Deci g şi BD sunt drepte necoplanare ; ……….1 punct

c) $k=4\Rightarrow MA=4\sqrt{2}\,cm; AB=4\sqrt{3}\,cm; AD=4\sqrt{6}\,cm\Rightarrow AC=BD=12\,cm.$ Fie $AC\cap BD=\{O\}$.

În semispaţiul opus determinat de (ABC) şi M, prin C construim, $CT\parallel MA$, a.î. $[CT]\equiv[MA]$ ...1 punct

Se arată că $MATC$ este paralelogram cu $MT\cap AC=\{O\}$. Din $MO\subset(MBD)$ şi $T\in MO\Rightarrow T\in(MBD)$.

Construim $CF\perp BD$, cu $F\in BD$, şi cu teorema celor trei perpendiculare, $TF\perp BD$.

Construim $CG\perp TF$, cu $G\in TF$ şi cu reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare,

$CG\perp(MBD)\Rightarrow d[C,(MBD)]=CG.$

$CT=CF=4\sqrt{2}\,cm;\ TF=8\,cm$ şi $CG=4\,cm.$ ....1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.