OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a V-a

**SUBIECTUL IV**

Se dau mulţimile: $A=\left\{\overline{abc} \,\middle|\, \overline{abc} \text{ împărţite la } 35 \text{ dau restul } 10\right\}$ şi

$$B=\left\{\overline{abc} \,\middle|\, \overline{abc}\,\vdots\,5 \text{ şi } \overline{abc} \text{ împărţite la } 7 \text{ dau restul } 3\right\}.$$

a) Determinaţi cel mai mic şi, respectiv, cel mai mare element din mulţimea $A$.
b) Demonstraţi că $A=B$.
c) Arătaţi că oricum am alege 16 elemente din $A$, există 2 elemente a căror diferenţă este divizibilă cu 11.

**BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE**

a) $115=35\cdot 3+10 \Rightarrow$ 115 este cel mai mic element din mulţimea A ....... 1 punct
$990=35\cdot 28+10 \Rightarrow$ 990 este cel mai mare element din mulţimea A ....... 1 punct

b) Fie $\left.\begin{array}{l}\overline{abc}\in A \Rightarrow \overline{abc}=35k+10=5(7k+2)\,\vdots\,5\\ \overline{abc}\in A \Rightarrow \overline{abc}=35k+10=7(5k+1)+3\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{abc}\in B \Rightarrow A\subseteq B$ .......... 1 punct

Fie $\overline{abc}\in B \Rightarrow \overline{abc}=5k$ şi $\overline{abc}=7p+3 \Rightarrow 5k=7p+3 \Rightarrow 5k=5p+2p+3 \Rightarrow (2p+3)\,\vdots\,5$

$2p+3=5t \Rightarrow 2p+2=4t+t-1 \Rightarrow (t-1)\,\vdots\,2 \Rightarrow t=2n+1 \Rightarrow \overline{abc}=35n+10\in A \Rightarrow B\subseteq A$

Cum $A\subseteq B$ şi $B\subseteq A \Rightarrow A=B$ ......... 1 punct

c) Construim submulţimile $A_1=\{35\cdot 3+10\}, A_2=\{35\cdot 4+10\}, A_3=\{35\cdot 5+10\}, A_4=\{35\cdot 6+10\}$,
$A_5=\{35\cdot 7+10; 35\cdot 18+10\}, A_6=\{35\cdot 8+10; 35\cdot 19+10\}, ..., A_{15}=\{35\cdot 17+10; 35\cdot 28+10\}$ ............... 1punct

Aplicând principiul cutiei, printre cele 16 elemente vom găsi două elemente din mulţimea $A_5$ sau $A_6$ sau $A_7$ .... sau $A_{15}$ .................................................................................................... 1 punct

Diferenţa acestor două numere este divizibilă cu 11 ................................................................ 1 punct

**Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.**