OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL al IV-lea

În triunghiul ABC cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, $[AD]$ este mediană cu $D \in (BC)$ şi $E \in (AB)$, astfel încât $CE \perp AB$. Fie $AD \cap CE = \{T\}$ şi $BT \cap AC = \{F\}$. Pe latura $[AC]$ există un punct G egal depărtat de AB şi BC.

Să se arate că:

a) $BC = 2 \cdot DF$; b) $DE^2 = \dfrac{BE \cdot AB}{2}$; c) $\dfrac{1}{CG} - \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{AC}$

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $\triangle ABC$ este isoscel de bază $[BC]$ cu $[AD]$ mediană AD este înălţime în $\triangle ABC$

$$\left.\begin{array}{l} AD \text{ este înălţime în } \triangle ABC \\ CE \text{ este înălţime în } \triangle ABC \\ AD \cap CE = \{T\} \end{array}\right\} \Rightarrow T \text{ este ortocentrul } \triangle\text{-lui } ABC$$ ……….1 punct

Atunci BF este înălţime în $\triangle ABC \Rightarrow \triangle BFC$ este dreptunghic în F

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BFC \text{ dr. în } F \\ [FD] \text{ este mediană} \end{array}\right\} \Rightarrow FD = \frac{1}{2} BC \Leftrightarrow BC = 2FD.$$ ……….1 punct

b) $\triangle ADB \sim \triangle CEB (U.U.) \Rightarrow \dfrac{AD}{CE} = \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{AB}{BC}$ ……….1 punct

$[DE]$ este mediană în $\triangle EBC$ dr. în $E \Rightarrow DE = BD$

$$\frac{DE}{BE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{AB}{2BD} \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{AB}{2DE} \Rightarrow DE^2 = \frac{AB \cdot BE}{2}$$ ……….1 punct

c) Pe latura $[AC]$ există un punct G egal depărtat de AB şi $BC \Rightarrow (BG$ este
este bisectoare în $\triangle ABC$; ……….1 punct

$[BG$ este bisectoare în $\triangle ABC \Rightarrow \dfrac{CG}{GA} = \dfrac{BC}{AB}$ ……….1 punct

$$\frac{CG}{GA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{CG}{GA+CG} = \frac{BC}{AB+BC} \Rightarrow \frac{CG}{AC} = \frac{BC}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AB+BC}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AB+BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AB}{BC} + \frac{BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{CG} - \frac{AC}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{CG} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC}.$$ ……….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.