OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL al IV-lea

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu $M, N,$ respectiv P, proiecţiile punctului C pe dreptele AB', AD', respectiv $B'D'$. Demonstraţi că:

a) AC', BD' *şi* $A'C$ sunt concurente.

b) $BM \perp AB'$.

c) Dreptele AP, $B'N$ şi $D'M$ sunt concurente.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $ABC'D'$ este paralelogram $\Rightarrow \exists\, O$ *a.î.* $AC' \cap BD' = \{O\}$, cu O mijlocul diagonalei $[BD']$ ….1 punct

$BCD'A'$ este paralelogram $\Rightarrow A'C$ trece prin O, mijlocul diagonalei $[BD']$ ….1 punct

b) Din $CB \perp (ABB'),\ AB' \subset (ABB') \Rightarrow CB \perp AB'$ ….1 punct

Din $AB' \perp BC,\ AB' \perp CM$ *şi* $BC \cap CM = \{C\} \Rightarrow AB' \perp (BCM)$

$AB' \perp (BCM)$ şi $BM \subset (BCM) \Rightarrow AB' \perp BM \Leftrightarrow BM \perp AB'$ ….1 punct

sau, direct:

Aplicând reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare, din
$CB \perp (ABA'), CM \perp AB',\ BM, AB' \subset (ABB') \Rightarrow BM \perp AB'$

c) Analog, aplicând reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare, obţinem $DN \perp AD'$ *şi* $C'P \perp B'D'$.

Fie $AB = a,\ BC = b\ BB' = c.$

Obţinem $AB' = \sqrt{a^2 + c^2},\ AD' = \sqrt{b^2 + c^2},\ B'D' = \sqrt{a^2 + b^2}$

Cu teorema catetei, în $\triangle ABB'$, $AB^2 = AM \cdot AB' \Rightarrow AM = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ şi ……….1 punct

$B'M = \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, de unde $\dfrac{AM}{B'M} = \dfrac{a^2}{c^2}$ ……….1 punct

Analog $\dfrac{B'P}{D'P} = \dfrac{b^2}{a^2}$ şi $\dfrac{D'N}{AN} = \dfrac{c^2}{b^2}$. În $\triangle AB'D'$ avem $\dfrac{AM}{B'M} \cdot \dfrac{B'P}{D'P} \cdot \dfrac{D'N}{AN} = 1$. Conform reciprocei Teoremei lui Ceva, deducem că dreptele AP, $B'N$ şi $D'M$ sunt concurente. ....1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.