Concurs de matematică – proba individuală

SUBIECTE
clasa a IX-a

1. Fie A o mulţime de 51 de elemente inclusă în mulţimea $A=\{1,\ 2,\ 3,...,100\}$.

Să se demonstreze că există cel puţin o ecuaţie de gradul doi cu coeficienţi în mulţimea A ale cărei rădăcini sunt raţionale.

2. Se consideră paralelogramul ABCD şi fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Fie punctul H pe segmentul AD şi fie punctul D pe segmentul NC. Să se arate că punctele G, H, N sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{CN}{ND}-\frac{AH}{HD}=\frac{1}{2}$.

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere naturale nenule cu proprietatea că

$$1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k a_{n-k}}{a_{k+1}}=a_n \text{, pentru orice număr natural nenul } n.$$

Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică.

4. Într-un triunghi oarecare ABC, fie mediana AD, $D\in(BC)$ şi E, F mijloacele laturilor (AB), (AC). Notăm cu $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor $\measuredangle(BDA)$, respectiv $\measuredangle(ADC)$.

Fie $AD\cap MN=\{O\}$, $AB\cap FO=\{P\}$ şi $AC\cap EO=\{R\}$. Să se arate că $\left|\overrightarrow{PR}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|$.

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timp de lucru 3 ore.