Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
25 noiembrie 2012

Soluţii

RUNDA I

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$.

Soluţie: $x\neq 0, y\neq 0$.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 5\cdot(x+y)=xy\Leftrightarrow (x-5)\cdot(y-5)=25.$

$D_{25}=\{-25;-5;-1;1;5;25\}$

Aşadar,

$\begin{cases}x-5=-25\\ y-5=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-20\\ y=4\end{cases};\begin{cases}x-5=-1\\ y-5=-25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-20\end{cases};$

$\begin{cases}x-5=-5\\ y-5=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases},\ (nu\text{ convine})\begin{cases}x-5=25\\ y-5=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=30\\ y=6\end{cases};$

$\begin{cases}x-5=1\\ y-5=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\ y=30\end{cases};\begin{cases}x-5=5\\ y-5=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=10\\ y=10\end{cases}$

$(x,y)\in\{(-20;4),(4;-20),(6;30),(30;6),(10;10)\}$

Răspuns: $(x,y)\in\{(-20;4),(4;-20),(6;30),(30;6),(10;10)\}$.

Problema 2. Să se determine numerele naturale prime mai mici ca 100 care pot fi scrise ca diferenţa cuburilor a două numere naturale.

Soluţie: Fie p numărul prim astfel încât $p=a^3-b^3\Leftrightarrow p=(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)$.

Deoarece $a-b<a^2+a\cdot b+b^2$, rezultă că

$\begin{cases}a-b=1\\ a^2+a\cdot b+b^2=p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ b^2+2\cdot b+1+b^2+b+b^2=p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ 3\cdot b^2+3\cdot b+1=p\end{cases};$

Dar $p<100$. Deducem ca $3\cdot b^2+3\cdot b\leq 99\Leftrightarrow b\cdot(b+1)\leq 33\Rightarrow b\leq 5\Rightarrow b\in\{1;2;3;4;5\}$;

$\begin{cases}b=1\\ a=2\end{cases};\begin{cases}b=2\\ a=3\end{cases};\begin{cases}b=3\\ a=4\end{cases};\begin{cases}b=4\\ a=5\end{cases};\begin{cases}b=5\\ a=6\end{cases}$

$S=\{7;19;37;61\}$.

Răspuns: $S=\{7;19;37;61\}$

Problema 3. Să se determine numerele $x,y\in\mathbb{N}$, astfel încât $x^3-y^3=2169$.

Soluţie:

$x^3 - y^3 = (x-y)\cdot(x^2 + x\cdot y + y^2) = (x-y)\cdot\left[(x-y)^2 + 3\cdot x\cdot y\right];$

$2169 = 9\cdot 241;$

$3/(x-y) \Rightarrow x = 3\cdot k + y,\ k\in\mathbb{N}^*;$

Obţinem $3\cdot k\cdot(9\cdot k^2 + 3\cdot x\cdot y) = 9\cdot 241 \Leftrightarrow k\cdot(3\cdot k^2 + x\cdot y) = 241;$

$241 =$ număr prim şi $k/241 \Rightarrow k = 1$ *sau* k=241;

$k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x\cdot y = 238 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 14 \end{cases};$

$k = 241$ nu convine.

Soluţia este $\begin{cases} x = 17 \\ y = 14 \end{cases}$

Răspuns: $\begin{cases} x = 17 \\ y = 14 \end{cases}$