Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
25 noiembrie 2012

Soluţii

RUNDA I

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left[\frac{x+1}{2}\right]=\frac{3x-1}{4}$, s-a notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a.

Soluţie: Notăm $\frac{3x-1}{4}=k,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{4\cdot k+1}{3}$. Ecuaţia devine $\left[\frac{2\cdot k+2}{3}\right]=k$.

Obţinem $k\le\frac{2\cdot k+2}{3}<k+1\Leftrightarrow k\in(-1;2]\cap\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;2\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{1}{3},\frac{5}{3},3\right\}$.

Răspuns: $x\in\left\{\frac{1}{3};\frac{5}{3};3\right\}$.

Problema 2. Să se determine toate numerele naturale n pentru care 5^n+6^n se divide cu 31.

Soluţie: Observăm că

$5^3\equiv 1(\bmod 31);6^3\equiv -1(\bmod 31)$.

Notăm $\mathrm{A}^n=5^n+6^n$.

Analizăm cazurile:

1).$n=6\cdot k\Rightarrow A_{6k}=5^{6k}+6^{6k}\equiv 2(\bmod 31)$, *nu convine*;

2).$n=6\cdot k+1\Rightarrow A_{6k+1}=5^{6k+1}+6^{6k+1}\equiv 11(\bmod 31)$, *nu convine*;

3).$n=6\cdot k+2\Rightarrow A_{6k+2}=5^{6k+2}+6^{6k+2}\equiv 30(\bmod 31)$, *nu convine*;

4).$n=6\cdot k+3\Rightarrow A_{6k+3}=5^{6k+3}+6^{6k+3}\equiv 0(\bmod 31)$, *convine*;

5).$n=6\cdot k+4\Rightarrow A_{6k+4}=5^{6k+4}+6^{6k+4}\equiv -1(\bmod 31)$, *nu convine*;

6).$n=6\cdot k+5\Rightarrow A_{6k+5}=5^{6k+5}+6^{6k+5}\equiv -11(\bmod 31)$, *nu convine*;

Răspuns: $n=6\cdot k+3,\ k\in\mathbb{N}$

Problema 3. Să se afle valorile extreme ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sin x-3}{\cos x+2},\forall x\in\mathbb{R}$

Soluţie: Ecuaţia $f(x)=m,\ m\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\sin x-m\cos x=2m+3$.

Această ecuaţie admite soluţii dacă şi numai dacă

$$\left|\frac{2m+3}{\sqrt{1+m^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow (2m+3)^2 \le 1+m^2 \Leftrightarrow 3m^2+12m+8 \le 0 \Leftrightarrow m \in \left[-2-\frac{2\sqrt{3}}{3};-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right],$$

$$f(\mathbb{R}) = \left[-2-\frac{2\sqrt{3}}{3};-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right].$$

Valorile extreme sunt $-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *şi* $-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Răspuns: $-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ şi $-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Problema 4. Să se determine ecuaţiile tangentelor duse la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-x+4$, ce trec prin punctul $A(2;2)$.

Soluţie: Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi dreapta $d:\ y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ tangenta dusă prin punctul $C(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei f.

$f'(x)=3x^2-1$. Punctul $A(2;2)\in d \Leftrightarrow 2-(x_0^3 - x_0 + 4) = (3\cdot x_0^2-1)\cdot(2-x_0) \Leftrightarrow x_0=0$ *sau* $x_0=3$.

Pentru $x_0=0$, ecuaţia tangentei este $x+y=4$.

Pentru $x_0=3$, ecuaţia tangentei este $26x-y=50$.

Răspuns: d_1: $x+y=4$.

d_2: $26x-y=50$