Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
25 noiembrie 2012

Soluţii
RUNDA a II-a

Problema 1. Să se determine numerele naturale a şi b ştiind că $[a,b]-(a,b)=176$ şi $\frac{[a,b]}{(a,b)}=45$.

Soluţie: Notăm $m=[a,b]$ şi $d=(a,b)$.

$\begin{cases} m-d=176 \\ \frac{m}{d}=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=180 \\ d=4 \end{cases}$**;**

Aşadar,

$a=4\cdot x$, b=$4\cdot$ y, $(x;y)=1$;

$[a,b]=4\cdot x\cdot y;(x;y)=1\Rightarrow x\cdot y=45\Rightarrow$

$\begin{cases} x=1 \\ y=45 \end{cases};\begin{cases} x=45 \\ y=1 \end{cases};\begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases};\begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases}.$

Răspuns: $(a,b)\in\{(4;180),(180;4),(20;36),(36;20)\}$

Problema 2. Să se determine mulţimea $A=\left\{\overline{abc}\,/\,2^{\overline{ab}}-2^{\overline{bc}}=2^{\overline{ac}}\right\}$

Soluţie : Dacă $x,y,z\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $2^x+2^y=2^z$, atunci $x=y$ şi $z=x+1$. Se demonstrează prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că $x\neq y$. Fie $x<y$. Atunci

$2^x+2^y=2^x\cdot\left(1+2^{y-x}\right)=2^z\Rightarrow 1+2^{y-x}\,/\,2^z\ (F)$.

Dacă $x=y$ atunci $2^{x+1}=2^z\Rightarrow z=x+1$.

Egalitatea devine: $2^{\overline{ac}}+2^{\overline{bc}}=2^{\overline{ab}}\Leftrightarrow\begin{cases} \overline{ac}=\overline{bc} \\ \overline{ab}=\overline{ac}+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=b \\ c=b-1. \end{cases}$

$A=\{110;221;332;443;554;665;776;887;998\}$.

Răspuns: $A=\{110;221;332;443;554;665;776;887;998\}$

Problema 3. Se dă trapezul $ABCD$ cu bazele $AB = 7\ cm$ şi $CD = 1\ cm$. Fie $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ astfel încât $MN \parallel AB$ şi patrulaterele $ABNM$ şi $MNCD$ au ariile egale. Să se calculeze lungimea segmentului $[MN]$.

Soluţie : Fie $MA = k \cdot MD$. Atunci $MN = \dfrac{k+7}{k+1}$**.** Notăm cu h înălţimea trapezului $ABCD$, cu h_1, h_2 înălţimile trapezelor $MNCD$, respectiv $ABNM$, $h_1 = \dfrac{1}{k+1} \cdot h,\ h_2 = \dfrac{k}{k+1} \cdot h$.

Condiţia problemei este:

$$\frac{1}{k+1} \cdot \left(1 + \frac{k+7}{k+1}\right) = \frac{k}{k+1} \cdot \left(7 + \frac{k+7}{k+1}\right) \Leftrightarrow 2 \cdot k^2 + 3 \cdot k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2};$$

$MN = 5$.

Răspuns: $MN = 5$ cm.