**Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"**
**Proba pe echipe, clasele VII-VIII**
**25 noiembrie 2012**

**Soluţii**

**RUNDA a III-a**

**Problema 1.** Să se determine toate tripletele de numere prime care verifică relaţia $2\cdot a+5\cdot b+c=35$.

**Soluţie:** Se observă că $b$ sau $c$ este număr par.

I.

Dacă $c=2$ atunci $2\cdot \mathrm{a}+5\cdot \mathrm{b}=33 \Rightarrow \mathrm{b}\in\{3;5\}$

$b=3 \Rightarrow a=9,$ nu convine ;

$b=5 \Rightarrow a=4,$ nu convine ;

II.

Dacă $b=2,$ atunci $2\cdot \mathrm{a}+\mathrm{c}=25 \Rightarrow \mathrm{a}\in\{2;3;5;7;11\} \Rightarrow c\in\{21;19;15;11,3\}$.

Dar c=21 şi c=15 nu convin.

Deci tripletele $(a;b;c)$ sunt $(3;2;19);(7;2;11);(11;2;3)$.

**Răspuns:** $(a;b;c)\in\{(3;2;19);(7;2;11);(11;2;3)\}$.

**Problema 2.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$\left\{\frac{x}{2}\right\}+\{x\}+\{2\cdot x\}=x,$ s-a notat cu $\{\mathrm{a}\}$ partea fractionara a numărului real a.

**Soluţie:**

$x=[x]+\{x\}$.

Ecuaţia devine $\left\{\frac{x}{2}\right\}+\{2\cdot x\}=[x]$.

Cum $\{a\}\in[0;1),\ \forall \mathrm{a}\in\mathbb{R},\ \Rightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\}+\{2\cdot x\}\in[0;2) \Rightarrow [x]\in\{0;1\}$.

Dacă $[x]=0 \Rightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\}+\{2\cdot x\}=0 \Rightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\}=\{2\cdot x\}=0 \Rightarrow \frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]=0 \Rightarrow x=0;$

Dacă $[x]=1 \Rightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\}+\{2\cdot x\}=1;$

Avem că

$$1 \le x < 2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le \dfrac{x}{2} < 1 \\ 2 \le 2 \cdot x < 4 \end{cases} \Rightarrow \left\{\dfrac{x}{2}\right\} = \dfrac{x}{2}$$

$a)\ 2 \le 2 \cdot x < 3$

$$1 = 2 \cdot x - 2 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5};$$

$b)\ 3 \le 2 \cdot x < 4$

$$1 = 2 \cdot x - 3 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}.$$

$$S = \left\{0; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right\}.$$

**Răspuns:** $x \in \left\{0; \dfrac{6}{5}; \dfrac{8}{5}\right\}$

**Problema 3.** Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu $AB = \sqrt{19}$, AC=$\sqrt{7}$ şi BC=6. Să se determine lungimile segmentelor $[BD]$, $[DE]$ şi $[EC]$, $D, E \in [BC]$, ştiind că triunghiul $\triangle ADE$ este echilateral, $D \in [BE]$.

**Soluţie:** Fie $AP \perp BC$.

Notăm $BP = x$. Aplicând teorema lui Pitagora, obţinem:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + AP^2 = 19 \\ (6-x)^2 + AP^2 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4 = BP;$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ADE \text{ echilateral} \\ AP \perp DE \end{array}\right\} \Rightarrow AD = 2;$$

$$AD = DE = 2 \Rightarrow BD = 3, EC = 1;$$

**Răspuns:** $BD = 3; DE = 2; EC = 1.$