Concursul Interjudeţean de Matematică “Cristian S. Calude”
Proba pe echipe, clasele IX-XII
25 noiembrie 2012

Soluţii

RUNDA a IV-a

Problema 1. Dacă $x, y, z, t \in [0;1]$, să se găsească maximul expresiei
$E(x,y,z,t) = x\cdot(1-t) + y\cdot(1-x) + z\cdot(1-y) + t\cdot(1-z)$ şi să se precizeze o posibilitate când maximul este atins.
Soluţie: Fie $ABCD$ un pătrat cu latura 1,
$M \in [AB], N \in [BC], P \in [CD], Q \in [AD], AM = x, NB = y, CP = z, DQ = t.$
Suma ariilor triunghiurilor $\triangle AMQ$, $\triangle MBN$, $\triangle NCP$, $\triangle PDQ$ este cel mult egală cu aria pătratului
$$\frac{x\cdot(1-t)}{2} + \frac{y\cdot(1-x)}{2} + \frac{z\cdot(1-y)}{2} + \frac{t\cdot(1-z)}{2} \le 1.$$
Cazurile de egalitate sunt: $(1,0,1,0)$ *sau* $(0,1,0,1)$.
Răspuns: $\max E(x,y,z,t) = 2$. Cazurile de egalitate sunt: $(1,0,1,0)$ *sau* $(0,1,0,1)$.

Problema 2. Numerele $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ verifică următoarele relaţii:
i) $x^2 + x\cdot y + y^2 = 9$
ii) $y^2 + z\cdot y + z^2 = 16$
iii) $z^2 + x\cdot z + x^2 = 25$
Să se calculeze valoarea expresiei $x\cdot y + x\cdot z + y\cdot z$.
Soluţie: Fie T un punct din plan. Construim segmentele $[TA], [TB], [TC]$ astfel încât
$TA = x, TB = y, TC = z$ şi $m(\measuredangle ATB) = m(\measuredangle ATC) = m(\measuredangle CTB) = 120^\circ$. $AB = 3; AC = 5; BC = 4$.
$$\text{Aria } \triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot\left(x\cdot y\cdot\sin 120^\circ + y\cdot z\cdot\sin 120^\circ + z\cdot x\cdot\sin 120^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(x\cdot y + x\cdot z + y\cdot z).$$
Pe de altă parte $\triangle ABC$ fiind dreptunghic, rezultă că
$$A_{\triangle ABC} = 6 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(x\cdot y + x\cdot z + y\cdot z) = 6 \Rightarrow x\cdot y + x\cdot z + y\cdot z = 8\sqrt{3}.$$
Observaţie: T este punctul lui Torricelli al triunghiului $\triangle ABC$.
Răspuns: $x\cdot y + x\cdot z + y\cdot z = 8\sqrt{3}$

Problema 3. Se consideră pătratele $ABCD$ şi $ABC'D'$. Într-un sistem de coordonate avem $A(2,0), B(-1,4)$. Să se scrie ecuaţiile dreptelor CD şi $C'D'$.
Soluţie:

$D_1 = pr_{Ox}D, B_1 = pr_{Ox}B;$

$\triangle B_1BA \equiv \triangle D_1AD \Rightarrow \begin{cases} AB_1 = DD_1 = 3 \\ AD_1 = BB_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow D(6;3);$

Fie $x_A = \dfrac{x_D + x_{D'}}{2} \Rightarrow x_{D'} = -2$

$y_A = \dfrac{y_D + y_{D'}}{2} \Rightarrow y_{D'} = -3$

$m_{AB} = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow m_{CD} = m_{C'D'} = -\dfrac{4}{3}$

Ecuaţia dreptei CD este $y-3=-\dfrac{4}{3}\cdot(x-6) \Leftrightarrow 4x+3y-33=0.$

Ecuaţia dreptei $C'D'$ este $y+3=-\dfrac{4}{3}\cdot(x+2) \Leftrightarrow 4x+3y+17=0.$

Răspuns: $CD: 4x+3y-33=0$;
$C'D': 4x+3y+17=0$

Problema 4. Să se determine numărul matricelor inversabile în $M_n(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ care au exact n minori nenuli de ordinul $n-1$.

Soluţie:

Dacă A este o matrice inversabilă în $M_n(\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ care are exact n minori nenuli de ordinul $n-1$, atunci inversa ei , A^{-1} are exact n elemente nenule: $d_1, d_2, ..., d_n \in \mathbb{Z}$.

Deoarece A este inversabilă, elementele d_i sunt dispuse astfel ca pe fiecare linie şi pe fiecare coloană se află exact unul din aceste numere . Atunci

$\det A^{-1} = \pm d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n \Rightarrow \det A = \pm(d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n)^{-1} \Rightarrow d_i \in \{-1;1\}, i = \overline{1,n}.$

Elementele d_i vor apare pe poziţiile $(i,\sigma(i)), \sigma \in S_n$.

$\sigma \in S_n$ pot fi aleşi în $n!$ moduri. Fiecare din cele n numere d_i poate fi ales în două moduri: -1 sau 1.

Rezultă că există $n! \cdot 2^n$ moduri.

Răspuns: $n! \cdot 2^n$