Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XIII-a

Galaţi, 24 noiembrie 2012

Clasa a XI-a

Problema 1.

a) Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ dat prin $a_0 = 2012$ şi $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + n}$, $n \geq 1$. Determinați termenul general al şirului dat şi doi termeni raționali diferiți de a_0.

Radu-Marius Tătaru, profesor, Galați

b) Fie $A \in M_2(\mathbb{Q})$, o matrice cu proprietatea $\det\left(A^2 - 2012 \cdot I_2\right) = 0$. Să se calculeze A^{2012}.

Mihai Dragoş Totolici, profesor, Galați

Problema 2.

a) Fie $n \geq 3$ un întreg finit şi $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{C}$ şi $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, numărul $\sum_{k=1}^{n} \frac{\left|a - r \cdot \omega^k\right|^2}{|a|^2 + r^2}$ este întreg.

O. Stănăşilă, G.M.

b) Fie matricea $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculați M^k, $k \in \mathbb{N}^*$.

Paul Cosma, student, Londra

Problema 3

Se dă şirul : $U_0 = 2$, $U_1 = \frac{5}{2}$, $U_{n+1} = U_n \cdot \left(U_{n-1}^2 - 2\right) - U_1$, $n \geq 1$. Să se arate că pentru $n \geq 1$ avem egalitatea $[U_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$, unde cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x .

***