CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „VIITORII MATEMATICIENI”

02.02.2013

Subiecte clasa a VIII-a

I. 1. Să se demonstreze că $\sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$, oricare ar fi $t \geq 0$.

2. Fie x, y, z $\in [1; +\infty)$ şi expresia E = $\frac{\sqrt{xy-1}}{xy} + \frac{\sqrt{yz-1}}{yz} + \frac{\sqrt{zx-1}}{zx}$.

a) Arătaţi că E $\leq \frac{3}{2}$.

b) Aflaţi valorile reale ale lui x,y,z astfel încât expresia să fie maximă.

II. Fie expresia $E(x, y, z) = \frac{x^3+y^3}{x^3+z^3} - \frac{x+y}{x+z}$.

a) Calculaţi E ($\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{5} - \sqrt{3}, \sqrt{3} - \sqrt{2}$).

b) Demonstraţi că există o infinitate de numere reale pozitive x, y, z, distincte pentru care E (x, y, z) = 0.

III. Fie *ABCDEFA'B'C'D'E'F'* o prismă hexagonală regulată dreaptă.

Ştiind că latura bazei *AB=a* şi muchia laterală *AA'*=$a\sqrt{2}$, se cere:

a) aflaţi măsura unghiului format de dreptele *A'F* şi *BD*;

b) aflaţi *TE* ştiind că T $\in [EE']$ şi (TAC) $\perp$ ($B'AC$);

c) distanţa de la E la planul ($B'AC$).

IV. În tetraedrul *ABCD*, *AB* $\perp$ *(BCD)*, iar înălţimea din *C* a triunghiului *BCD* este egală cu lungimea muchiei *AB*. Fie *M* mijlocul lui *(AC)* şi *MN* $\perp$ *BD*, *N* $\in$ *BD*. Să se arate că *NM* $\perp$ *AC*.

Notă: TIMP DE LUCRU: 2 ore 30 min.
Fiecare subiect este punctat cu maxim 7 puncte.

SUCCES!