Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Galaţi

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XIII-a
Galaţi, 24 noiembrie 2012

Clasa a XII-a

Problema 1

a) Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

$(***)$

b) Fie şirul de numere pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}, \forall n\geq 1$. Demonstaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=a_1+a_2+...+a_n$, $n\geq 1$ este divergent.

Profesor doctor habil. Cristinel Mortici

Problema 2..

Fie (A, $\cdot$) un monoid finit. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, notăm cu $A(n)=\left\{x^n \mid x\in A\right\}$.

a) Demonstraţi că există $a,b\in\mathbb{N}^*$ distincte cu proprietatea că *A(a) =A(b).*

b) Demonstraţi că există $a\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că pentru orice $b\in\mathbb{N}^*$ cu $a\mid b$ să rezulte că *A(a) =A(b).*

Paul Cosma, student la Imperial College, Londra

Problema 3

a) Să se arate că : dacă $f,g:I\to\mathbb{R}$, *I* interval, *f* admite primitive, *g* derivabilă cu g' continuă, atunci $f\cdot g$ admite primitive.

$(***)$

b) Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *g* este surjectivă şi de două ori derivabilă, g'' continuă, iar ecuaţia $g'(x)=0$ are doua rădăcini reale a şi b, $g''(a)\neq 0, g''(b)\neq 0$.

Ştiind că $f\circ g$ admite primitive, să se arate că *f* admite primitive .

Vasile Popa, profesor, Galaţi