Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
Galaţi, 24 noiembrie 2012

Clasa a IX-a

Problema 1..

Se dau numerele prime $p,q\in\mathbb{N}$, diferite. Determinaţi mulţimea $M=\left\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,\frac{\sqrt{p}+\sqrt{a}}{\sqrt{q}+\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}\right\}$.

Iuliana Duma,prof. Galaţi

Problema 2.

Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu $BC=a, CA=b, AB=c$. Considerăm punctele $M\in(AB), N\in(AC)$ variabile, astfel încât: $b^2\cdot\frac{MB}{MA}+c^2\cdot\frac{NC}{NA}=a^2$.

a)Arătaţi că dreapta MN trece printr-un punct fix notat F.

b)Dacă $m(\sphericalangle BAC)=90^\circ$ demonstraţi că punctul F este mijlocul înălţimii din A a triunghiului $\triangle ABC$.

c)Demonstraţi că patrulaterul MBCN este inscriptibil dacă şi numai dacă MF=FN.

* * *

Problema 3.

a)Fie numerele reale $0<a_1<a_2<\ldots<a_n$ şi $0<b_1<b_2<\ldots<b_n$ .Notăm $\left(b_{i_1},b_{i_2},\ldots,b_{i_n}\right)$ o rearanjare (permutare) a mulţimii $(b_1,b_2,\ldots b_n)$ şi formăm toate sumele

$$S(i_1,i_2,\ldots,i_n)=a_1\cdot b_{i_1}+a_2\cdot b_{i_2}+\ldots+a_n\cdot b_{i_n}$$

Să se arate că :

$$S(n,n-1,\ldots,1)\le S(i_1,i_2,\ldots,i_n)\le S(1,2,\ldots n)$$

b)Demonstraţi că dacă $n\in\mathbb{N}^*$ şi $a,b,c>0$ atunci

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{1}{2}\cdot\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right).$$

* * *