



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
CLASA a X-a  
16.02.2013**

**Subiectul I.(30 puncte )**

Fie funcția  $f : R \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{21^x + 1}{3^x + 7^x}$ .

- Să se studieze injectivitatea funcției;
- Este funcția  $f$  surjectivă?
- Care este numărul soluțiilor ecuației  $f(x) + f(-x) = 1$ ?

*Prof. Eugen Jecan, Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej*

**Subiectul II.(20 puncte )**

Să se determine numerele reale  $x, y, z, t$  care satisfac relațiile:

$$x - \sqrt{y} = y - \sqrt{z} = z - \sqrt{t} = t - \sqrt{x} = 2.$$

*prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Mihai Viteazul” Turda*

**Subiectul III.(20 puncte)**

Să se arate că există o infinitate de numere reale  $a, b, c$  astfel încât  $\sqrt[3]{3^a + 5^b + 7^c} \in N^*$ .

*prof. Ilie Diaconu, Liceul Teoretic “Avram Iancu” Cluj Napoca*

**Subiectul IV.(20 puncte)**

- Demonstrați că  $\frac{pq}{p+q} \leq \frac{p+q}{4}$ ,  $\forall p, q > 0$ ;
- Fie numerele  $a, b, c \in (0, 1)$  și  $x, y, z \in (0, \infty)$  astfel încât  $a = (bc)^x$ ,  $b = (ca)^y$ ,  $c = (ab)^z$ . Arătați că  $\frac{1}{x+y+2} + \frac{1}{y+z+2} + \frac{1}{z+x+2} \leq 1$ .

Gazeta matematică, nr. 7-8-9/2011

**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.  
Timp efectiv de lucru - 3 ore.**