OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XI-a
16.02.2013

Subiectul I.(30 puncte)

Fie $M \subset M_3(R_+^*)$ mulțimea matricelor care au pe diagonala principală toate elementele egale, iar produsul elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloană egal cu 1.

a) Dați un exemplu de matrice din M care nu are toate elementele numere raționale;

b) Demonstrați că $\det(A) \geq 0, \forall A \in M$.

prof. Viorel Lupşor, L.T. „O. Ghibu" Cluj-Napoca

Subiectul II.(20 puncte)

Fie $A, B, C \in M_4(\mathbf{C})$ cu A inversabilă şi $C \cdot (A - B) = A^{-1} \cdot B$. Să se arate că $(A - B) \cdot C = B \cdot A^{-1}$.

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Mihai Viteazul"Turda

Subiectul III.(20 puncte)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n \geq 1} : a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ şi

$(b_n)_{n \geq 1} : b_n = n^\alpha (1 - a_n)$, $\alpha \in R$.

a) Demonstrați că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$; b) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

prof. univ. dr. Dorian Popa, U.T. Cluj-Napoca

prof. Viorel Lupşor, L.T. „O. Ghibu" Cluj-Napoca

Subiectul IV.(20 puncte)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ şi $(b_n)_{n \geq 1}$, unde: $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!}$ şi $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k!(k+2)$

Se cere: a) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$; b) $\lim\limits_{n \to \infty} (2a_n)^{b_n}$.

prof. Alb Nicolae, Lic. T. "O. Goga" Huedin

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.